1. Noções Sobre Conjuntos

1.1. Links:

Teoria dos Conjuntos Kirilov
Teoria dos Conjuntos IME - USP
Relações e Funções
O que é uma Relação Matemática

1.2. Introdução – A Noção de Conjunto – ok1

Conjuntos são coleções ou agrupamento de objetos, de qualquer tipo, como números, pessoas, frutas, etc. Em outras palavras, um conjunto pode ser entendido como uma coleção qualquer, bem definida, de coisas, ou objetos, que compartilham alguma característica comum, chamados de elementos do conjunto.

Por essa descrição inicial é possível verificar que a noção de conjunto é uma coisa primitiva, ou seja, ela não é formada ou construída com base em noções mais básicas ou mais simples.

Como exemplos, podemos mencionar:

- O conjunto das vogais do alfabeto, no qual cada uma das vogais é um elemento;
- O conjunto dos alunos de uma disciplina, onde cada um dos alunos é um elemento;

Ao pensar sobre conjunto como um agrupamento de objetos que compartilham uma propriedade comum, podemos, por exemplo, pensar na palavra pássaro e associá-la a um conjunto de animais que possuem certas características, como o corpo coberto de penas e reprodução ovípara. Dessa forma, uma descrição de objetos, animais ou pessoas pode identificar um conjunto. Por exemplo: o conjunto dos pássaros que voam, ou o conjunto dos alunos da UNICAMP.

A noção de conjunto pode ser considerada como um dos primeiros conceitos abstratos da mente humana. Um pássaro é um ser vivo que existe independente do pensamento humano. Mas a noção de pássaro, associada ao conjunto de todos os pássaros do mundo, é uma noção, criada pelo nosso raciocínio.

A noção de conjunto era uma coisa conhecida e usada pelos matemáticos ao longo da história, mas sem ser expressa de modo formal.

Foi em 1873 que o matemático alemão George Cantor formulou a Teoria dos Conjuntos, com abordagem em cima dos conjuntos numéricos e suas propriedades, principalmente às relacionadas aos seus tamanhos infinitos.

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos por Cantor, e por outros matemáticos do final do século XIX, proporcionou, posteriormente:

- uma base sólida para a matemática moderna,
- tornou-se uma ferramenta fundamental para a estruturação e aprofundamento de muitos conceitos e
- ampliou ainda mais as possibilidades de investigação nessa área do conhecimento humano.

~~A teoria dos conjuntos foi formulada pelo matemático russo George Cantor, em 1873, e é a parte da matemática que trata de coleções ou agrupamento de objetos, de qualquer tipo, como números, pessoas, frutas, etc., abordando propriedades, características e operações sobre esses agrupamentos (conjuntos). Ou seja, um conjunto pode ser entendido como uma coleção qualquer, bem definida, de coisas, ou objetos, que compartilham alguma característica comum, chamados de elementos do conjunto.~~

~~A noção de conjunto já existia muito antes da teoria formulada por Cantor, e é uma noção primitiva, ou seja, ela não é formada, ou construída, a partir de noções mais simples.~~

~~Como exemplo, podemos mencionar:~~

- ~~O conjunto das vogais do alfabeto, no qual cada uma das vogais é um elemento;~~
- ~~O conjunto dos alunos de uma disciplina, onde cada um dos alunos é um elemento;~~

~~Uma coisa interessante que vale ressaltar sobre como o conhecimento matemático foi sendo construído, é que, ainda que os matemáticos do início do século XVII trabalhassem sem o conhecimento formal da teoria dos conjuntos, eles conseguiram realizar avanços significativos na matemática utilizando outras ferramentas disponíveis na época.~~

~~O desenvolvimento da teoria dos conjuntos por Georg Cantor, e por outros matemáticos do final do século XIX, proporcionou, posteriormente:~~

- ~~uma base sólida para a matemática moderna,~~

- ~~tornou-se uma ferramenta fundamental para a estruturação e aprofundamento de muitos conceitos e~~
- ~~ampliou ainda mais as possibilidades de investigação nessa área do conhecimento humano.~~

1.3. Formas de Representação dos Conjuntos – ok1

Os conjuntos podem ser representados das seguintes formas:

- Enumerando os elementos do conjunto: fazendo uma lista entre chaves com todos os elementos do conjunto. Exemplo: **A** = {0, 1, 2, 3, 4, 5};
- Por notação matemática: Exemplo: **A** conjunto dos x ∈ N / x>= 1 e x <= 5; (COLOCAR OS SÍMBOLOS!!)
- Descrevendo verbalmente as características: podemos simplesmente descrever a característica do conjunto. Exemplos:
    - seja **X** um conjunto, definido como X = {x é um número positivo múltiplo de 5}, em palavras, apenas, **X** é o conjunto dos números positivos múltiplos de 5;
    - **Y**: é o conjunto dos meses do ano.
- Diagrama de Venn - Euler: Venn (John Venn, matemático inglês, 1832 – 1863) e Euler (Leonhard Euler matemático suíço, 1707 – 1783). Neste diagrama, os conjuntos que fazem parte de um problema, ou trecho de uma exposição, são representados no formato de um círculo (formato mais usado), ou de algum outro tipo de figura fechada (polígono), sempre sobrepostos no caso do diagrama de Venn mas, nem sempre, no caso do diagrama de Euler. Essa forma de representar os conjuntos facilita a visualização das operações (união, intersecção e diferença) que podem ser feitas sobre eles e, consequentemente, facilita a resolução de problemas de lógica matemática que envolvem conjuntos. Nos diagramas, os conjuntos são representados como círculos ou polígonos. Na representação de dois ou mais conjuntos, eles aparecem sobrepostos, na maior parte dos casos.

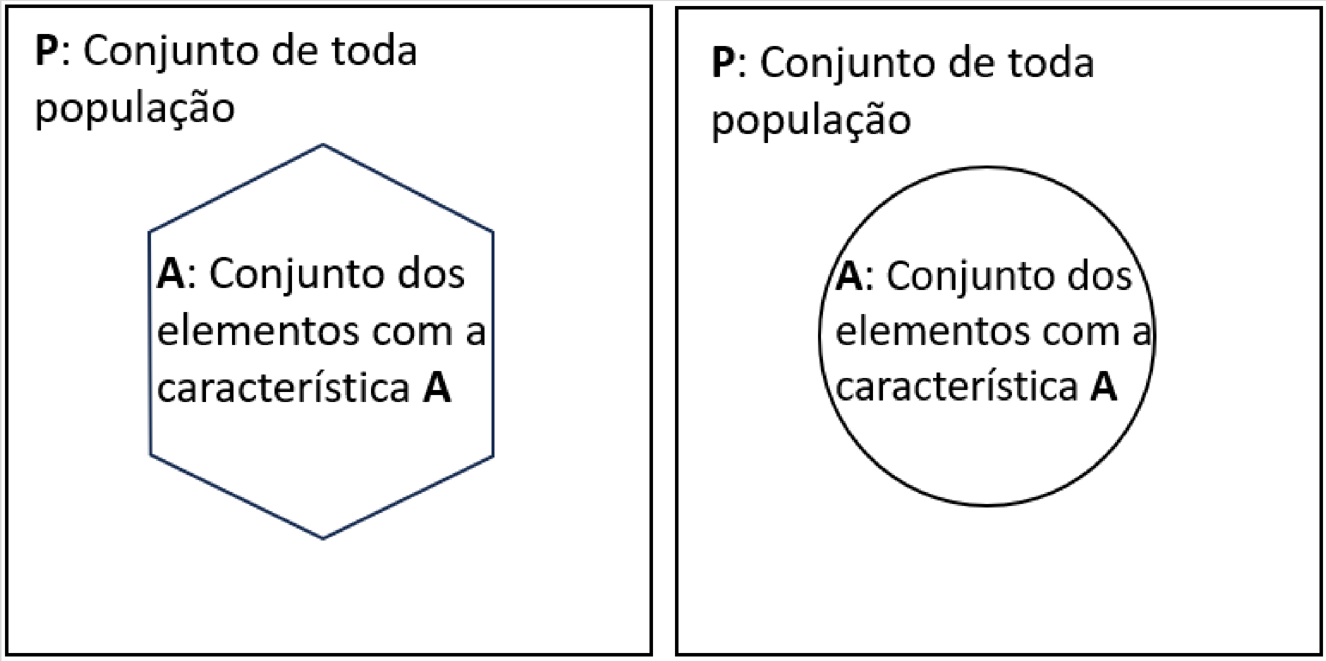


Figura xx:

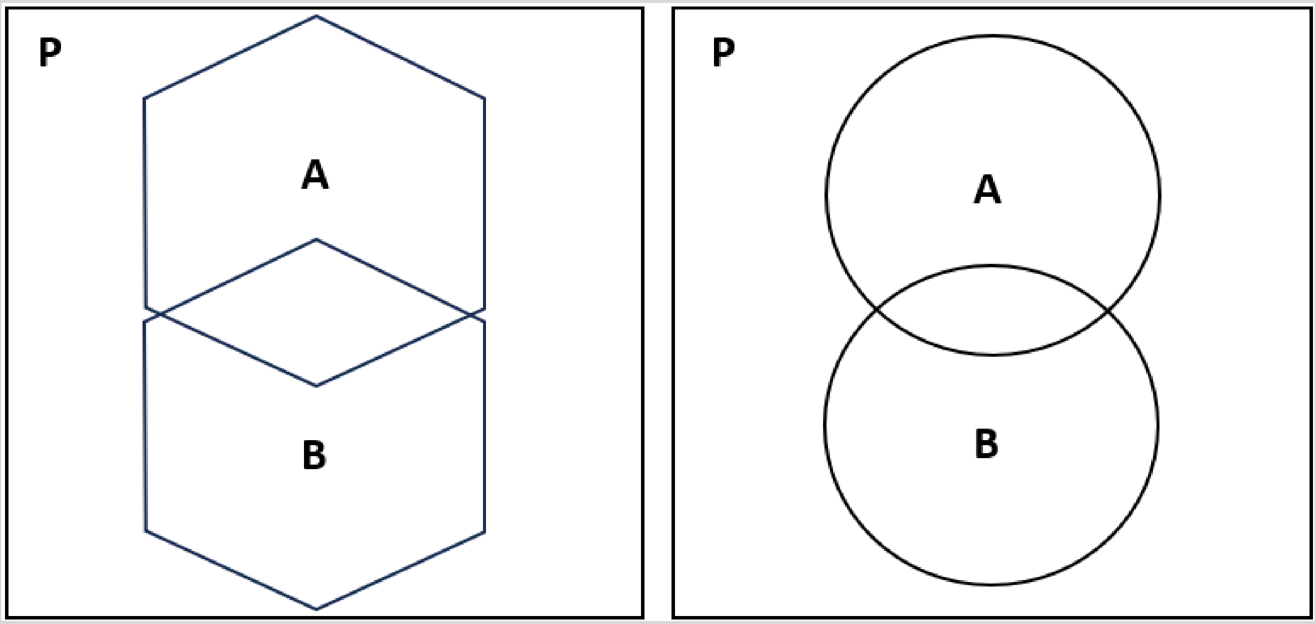


Figura xy

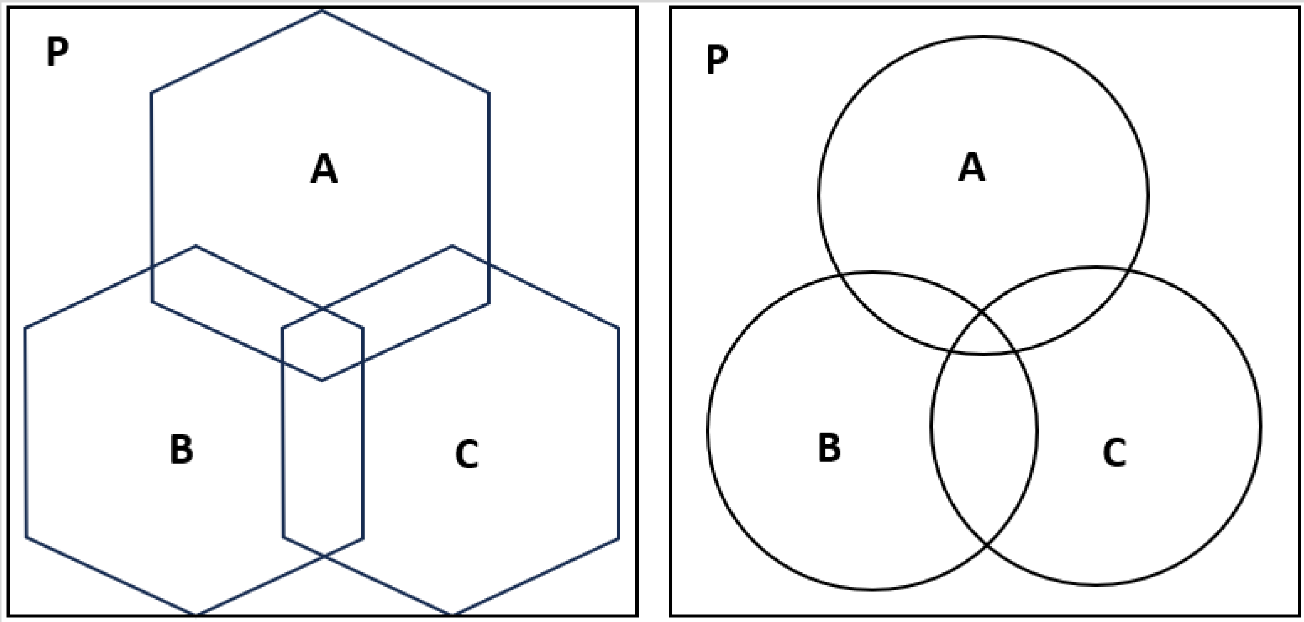


Figura zz

A diferença entre os diagramas de Venn e Euler é que neste último, a sobreposição só ocorre se ela existir de fato. Por exemplo, na representação dos conjuntos dos reinos animal, vegetal e mineral, o diagrama de Euler seria necessariamente o mostrado do lado esquerdo da Figura xx, e o de Venn poderia ser o da direita, com a consideração de que as intersecções são vazias, embora elas ocupem uma área na figura.

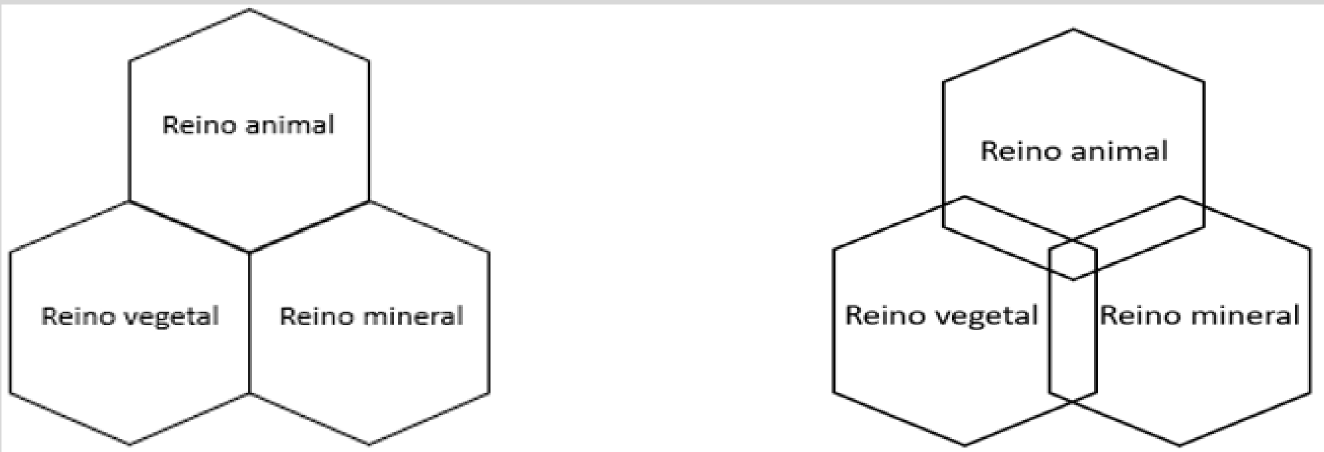


Figura 1.3.1: Diagrama de Euler (lado esquerdo) e de Venn (lado direito)

Uma pergunta que alguém pode fazer é porque os diagramas usados para representar graficamente os conjuntos, são chamados de diagramas de Venn - Euler, se o matemático Euler nasceu muito antes da formulação da teoria dos conjuntos?

A resposta é que, embora o matemático Leonhard Euler (1707-1783) tenha nascido antes da formulação formal da teoria dos conjuntos, em seu trabalho sobre teoria dos grafos (explicar) ele contribuiu para o desenvolvimento de técnicas de representação gráfica que mais tarde foram incorporadas aos diagramas de Venn.

John Venn, por outro lado, viveu no século XIX (1834 - 1923) e é conhecido por seu trabalho em lógica e teoria dos conjuntos. Ele aprimorou as técnicas de Euler e desenvolveu os diagramas de Venn como uma forma de representar visualmente as relações entre conjuntos, usando, basicamente, sobreposições de círculos.

1.4. Relação entre Elemento e Conjunto e Relação entre Conjuntos – ok1

Relação de Pertinência (entre elemento e um conjunto):

A relação de pertinência é usada para mostrar se um elemento está ou não dentro de um conjunto, em outras palavras, se ele pertence ou não pertence a um conjunto. Para representar essa relação, utilizamos os símbolos;

$\in$ (lê-se pertence) e

$\notin$ (lê-se não pertence).

Exemplos:

- **P** é conjunto dos números pares. Então, podemos dizer que o 7 $\notin$ P e que 12 $\in$ P;
- **A**: {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Então, 1 $\in$ **A** e 6 6 $\notin$ **A**;
- **B**: {4, 5, 6}. Então, 1 $\notin$ **B** e 6 $\in$ **B**;

Relação de Inclusão (entre conjuntos):

Relação de inclusão existe quando todos os elementos de um determinado conjunto pertencem ou não a um outro conjunto. Em outras palavras, é a relação que identifica se um conjunto está contido em outro. Essa relação é indicada pelos seguintes símbolos:

$\subset$ → lê-se: está contido.

$\supset$ → lê-se: contém.

$\not\supset$ → não contém

$\not\subset$ → não está contido

Exemplos:

Considerando os conjuntos **A**: {0, 1, 2, 3, 4, 5}, **B**: {4, 5, 6} e **D** = {1, 2, 3}, temos:

- a notação **A** $\supset$ **D** indica que o conjunto **A** contém o conjunto **D** e
- a notação **D** $\subset$ **A** significa que o conjunto **B** está contido em **A**
- **OBS**: no caso dos símbolos "contém" e "está contido", a abertura do símbolo fica virada para o conjunto maior;
- a notação **B** $\not\supset$ **D** indica que o conjunto **B** não contém o conjunto **D** e
- a notação **D** $\not\subset$ **B** significa que o conjunto **D** não está contido em **B**

1.5. Tipos de Conjuntos – ok1

Subconjuntos

Consideremos os conjuntos **A**: {e_1, e_2, e_3} e **B**: {e_1, e_2}.

Olhando para eles, é possível concluir que o conjunto **B** está contido no conjunto **A**. Quando isto acontece dizemos que o conjunto que está contido, no caso o **B**, é um sub-conjunto daquele que o contém, no caso o **A**.

Um conjunto pode ter vários subconjuntos, construídos a partir dos elementos pertencentes a ele.

Por exemplo: **A**: {e_1, e_2, e_3} tem como subconjuntos os seguintes conjuntos: o próprio conjunto **A** (o conjunto **A** é subconjunto dele mesmo); **B:** {e_1, e_2}; **C**: {e_1, e_3}; **D**: {e_2, e_3}; **E**: {e_1}; **F**: {e_2}; **G**: {e_3} e {} (conjunto vazio).

Conjunto unitário

É o conjunto que possui somente um elemento, como o conjunto **E**: {e_1} mostrado anteriormente. Dado o conjunto **A**: {e_1, e_2, e_3}, temos os subconjuntos {e_1}, {e_2} e {e_3}, que são todos conjuntos unitários.

ATENÇÃO: O conjunto **Z**: {0} também é um conjunto unitário, pois ele possui um único elemento, o "0". Então, esse conjunto **Z** não deve ser confundido com um conjunto vazio.

Conjunto vazio

É o conjunto que não possui nenhum elemento. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Para representar o conjunto vazio, há duas representações possíveis, sendo elas V: { } ou o símbolo Ø.

Conjuntos das partes

É o conjunto de todos os sub-conjuntos possíveis de serem formados a partir de um conjunto. Por exemplo, seja **A**: $\{e_1, e_2, e_3\}$, podemos listar todos os subconjuntos desse conjunto começando com o conjunto que possui nenhum elemento (vazio) e, depois, os que possuem um, dois e três elementos, respectivamente.

Sendo assim, podemos descrever o conjunto das partes de **A** desta forma:

P(**A**): $\{\{\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}\}$

Uma forma de se chegar ao número de elementos do conjunto **P**(**A**), e quais são eles, é usar uma coisa chamada "tabela verdade", na qual são listadas todas os sub-conjuntos possíveis de serem formados a partir do conjunto **A**.

Nessa tabela, existem colunas associadas aos 3 elementos de **A** (e_1, e_2 e e_3) e uma coluna onde são colocados os elementos de **P**(**A**). Em cada linha, as células associadas aos elementos, serão preenchidas com:

- **1**, caso ele participe do conjunto final e
- **0**, caso ele não participe

Possiblidade de sub-conjunto	Elemento 1 de **A** = e_1	Elemento 2 de **A** = e_2	Elemento 3 de **A** = e_3	Elemento de **P**(**A**):
1	**0**	**0**	**0**	Vazio {}
2	**0**	**0**	**1**	$\{e_3\}$
3	**0**	**1**	**0**	$\{e_2\}$
4	**0**	**1**	**1**	$\{e_2, e_3\}$
5	**1**	**0**	**0**	$\{e_1\}$
6	**1**	**0**	**1**	$\{e_1, e_3\}$
7	**1**	**1**	**0**	$\{e_1, e_2\}$
8	**1**	**1**	**1**	$\{e_1, e_2, e_3\}$ = **A**

Com base na tabela acima, é possível concluir que para um conjunto de:

- 1 elemento ➔ P(A) = $\{\{\}, \{e_1\}\}$ ➔ n[P(**A**)] = 2 = $2^{\mathbf{1}}$;
- 2 elementos ➔ P(A) = $\{\{\}, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$ ➔ n[P(**A**)] = 4 = $2^{\mathbf{2}}$;
- 3 elementos ➔ P(A) = (ver acima!) ➔ n[P(**A**)] = 8 = $2^{\mathbf{3}}$;
- 4 elementos ➔ n[P(A)] = 16 = $2^{\mathbf{4}}$;

Para saber a quantidade de partes em que é possível dividir um conjunto, usamos a fórmula:
n[P(**A**)] = $2^{\textbf{elementos}}$.

Conjunto finito e infinito

Ao trabalhar com conjuntos, encontramos conjuntos que são limitados (finitos) e aqueles que são ilimitados (infinitos). O conjunto dos números pares ou ímpares, por exemplo, é infinito e, para representá-lo, descrevemos alguns dos seus elementos em sequência, de forma que seja possível prever quais serão os próximos elementos, e colocamos reticências no final.

Conjunto dos números ímpares **I**: {1,3,5,7,9,11...}

Conjunto dos números pares **P**: {2,4,6,8,10, ...}

Já em um conjunto finito, não colocamos as reticências no final, pois ele possui começo e final definidos.

X: {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Conjunto universo

O conjunto universo, denotado por **U**, é definido como o conjunto formado por todos os elementos que devem ser considerados dentro de um problema. Todo elemento pertence ao conjunto universo e todo conjunto está contido no conjunto universo.

1.6. Operações com Conjuntos – ok1

Como mencionado de forma breve anteriormente, as operações com conjuntos são:

- união,
- intersecção,
- diferença e
- complemento

Para ilustrar as operações, vamos considerar os conjuntos:

- Conjunto de uma população **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}
- Conjunto **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} (um subgrupo ou subconjunto da população **P**)
- Conjunto **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} (um outro subgrupo ou subconjunto da população **P**)

Embora as operações com conjuntos possam ser feitas com mais de três conjuntos, nos exemplos as seguir, iremos considerar apenas os conjuntos **P**, **A** e **B**.

Intersecção de conjuntos.

A intersecção de dois ou mais conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a todos eles. O símbolo usado para representar a intersecção é o "∩". Vejamos alguns exemplos:

- Intersecção entre os conjuntos **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é **AUB**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}
- Intersecção entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} é

  P∩A: {e_1, e_2, e_3, e_4}, ou seja, é o próprio conjunto **A**. Assim, se um conjunto (p. ex., **A**) está contido em um outro (p. ex., **P**), em outras palavras, **A** ⊂ **P**, então **P∩A** = **A**;

- Intersecção entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  P∩B: {e_1, e_2, e_3, e_4} = **B**, pelo fato de **B** ⊂ **P**
- Intersecção entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  P∩A∩B: {e_3, e_4} = **A∩B**, pelo fato de **A∩B** ⊂ **P**

OBS: quando mais à frente formos abordar uma coisa chamada cardinalidade, que é o número de elementos de um conjunto, veremos que não há como determinar o número de elementos do conjunto intersecção, p. ex., o número de elementos de **A∩B**, conhecendo-se apenas os números de elementos dos conjuntos **A** e **B**.

União de conjuntos.

A união de dois ou mais conjuntos é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a todos eles, sem que os elementos comuns a todos sejam colocados mais de uma vez no conjunto união resultante. O símbolo usado para representar a intersecção é o "U". Vejamos alguns exemplos:

- União entre os conjuntos **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é **A**U**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} é

  PU**A**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} ou seja, é o próprio conjunto **P**. Assim, se um conjunto (p. ex., **A**) está contido em um outro (p. ex., **P**), em outras palavras, **A** ⊂ **P**, então **P**U**A** = **P**;
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  PU**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4} = **P**, pelo fato de **B** ⊂ **P**
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  PU**A**U**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, = **P**, pelo fato de **A**U**B** ⊂ **P**

Diferença entre dois conjuntos.

A operação de diferença entre dois conjuntos, possui uma particularidade. Diferentemente das operações de intersecção e união, onde a ordem em que os conjuntos aprecem na operação não altera o resultado, no caso da diferença essa ordem importa. Assim, a operação **A** – **B** pode dar um resultado diferente de **B** – **A**.

No caso de **A** – **B**, o conjunto resultante é o conjunto **A** menos os elementos comuns a **A** e **B**.

No caso **B** – **A**, o conjunto resultante é o conjunto **B** menos os elementos comuns a **A** e **B**. Vejamos as possibilidades:

- U entre os conjuntos **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é **A**U**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} é

  PU**A**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} ou seja, é o próprio conjunto **P**. Assim, se um conjunto (p. ex., **A**) está contido em um outro (p. ex., **P**), em outras palavras, **A** ⊂ **P**, então **P**U**A** = **P**;
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  PU**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4} = **P**, pelo fato de **B** ⊂ **P**
- União entre os conjuntos **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4} e **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6} é

  PU**A**U**B**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, = **P**, pelo fato de **A**U**B** ⊂ **P**

A diferença envolvendo dois conjuntos **A** e **B**, pode ser:

- **A - B** é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto **A** menos os elementos que pertencem aos dois conjuntos. A notação matemática da diferença dos conjuntos **A** e **B** é **A - B**. Exemplo: **A**: {0, 1, 2, 3, 4, 5} e **B**: {4, 5, 6}; **A** – **B** = {0, 1, 2, 3}
- **B - A** é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto B menos os elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos **A** e **B**. A notação matemática da intersecção dos conjuntos **A** e **B** é **A - B**. Exemplo: **A**: {0, 1, 2, 3, 4, 5} e **B**: {4, 5, 6}; **B** – **A** = {6}
- **P** – **A**
- **A** – **P**

Complemento de conjuntos.

É uma modalidade de diferença de conjuntos, que ocorre quando um conjunto está contido em outro. Exemplo: dados **A** = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e **B** = {3, 4, 5}, o complementar de **B** em **A** é a diferença **A** - **B**. Representação: $\mathbf{C_A B}$ = **A** - **B** = {0, 1, 2}. Já o complementar de **A** em **B** é a diferença **B** - **A**. Representação: $\mathbf{C_B A}$ = **B** - **A**= {} (conjunto vazio).

Cardinalidade de conjuntos

Cardinalidade é o número de elementos do conjunto. Dado um conjunto **A**, a sua cardinalidade é expressa como n(**A**).

Por exemplo, para o conjunto **A**: {0, 1, 2, 3, 4, 5}, n(**A**) = 6 e para o conjunto **B**: {4, 5, 6}, n(**B**) = 3.

Para os conjuntos do exemplo acima, vejamos agora as cardinalidades resultantes de algumas operações entre eles:

- Cardinalidade do conjunto intersecção **A**∩**B**, n(**A**∩**B**). Para determinar este valor, é necessário verificar os elementos dos conjuntos **A** e **B** e identificar quantos são os elementos comuns aos dois. No caso do exemplo acima existem 2 elementos repetidos (4 e 5). Logo, a cardinalidade de **A**∩**B**, n(**A**∩**B**) = 2. Atentar para o fato de que este número não pôde ser determinado conhecendo apenas os valores de n(**A**) = 6 e n(**B**) = 3. Foi necessário inspecionar os conjuntos;
- Cardinalidade do conjunto união **A**U**B**, n(**A**U**B**). Para determinar n(**A**U**B**) é necessário somar os números de elementos dos dois conjuntos, n(**A**) e n(**B**) e subtrair o número de elementos repetidos, para que não sejam contados duas vezes. Como vimos no boolet anterior o número de elementos repetidos é igual ao número de elementos da intersecção entre os dois conjuntos, n(**A**∩**B**). Assim, n(**A**U**B**) = n(**A**) + n(**B**) - n(**A**∩**B**);
- Cardinalidade da diferença **A** – **B**, n(**A** – **B**) = n(**A**) - n(**A**∩**B**);
- Cardinalidade da diferença **B** – **A**, n(**B** – **A**) = n(**B**) - n(**A**∩**B**);

Cardinalidades associadas a sub-conjuntos da população e a relação entre elas

Colocando de uma forma resumida, o que foi visto no item anterior, em uma população **P**, na qual são encontrados grupos com características **A** e **B**, é possível identificar, entre outras, as seguintes situações. Pessoas que:

1. Que fazem parte de toda população estudada: conjunto **P**, com cardinalidade n(**P**);
2. que possuem a característica **A**: conjunto **A**, com cardinalidade n(**A**);
3. que possuem a característica **B**: conjunto **B**, com cardinalidade n(**B**);
4. que possuem uma ou outra característica **A** ou **B**: conjunto **A**U**B**, com cardinalidade n(**A**U**B**);
5. que possuem as duas características: conjunto **A**∩**B**, com cardinalidade n(**A**∩**B**);
6. que possuem apenas a característica **A**: **A** - **A**∩**B**, com cardinalidade n(**A** – **A**U**B**);
7. que possuem apenas a característica **B**: **B** - **A**∩**B**, com cardinalidade n(**B** – **A**U**B**);
8. que não possuem nenhuma das duas: **P** – **A**U**B**, com cardinalidade n(**P** – **A**U**B**);

As representações gráficas dos conjuntos acima são mostradas na Figura

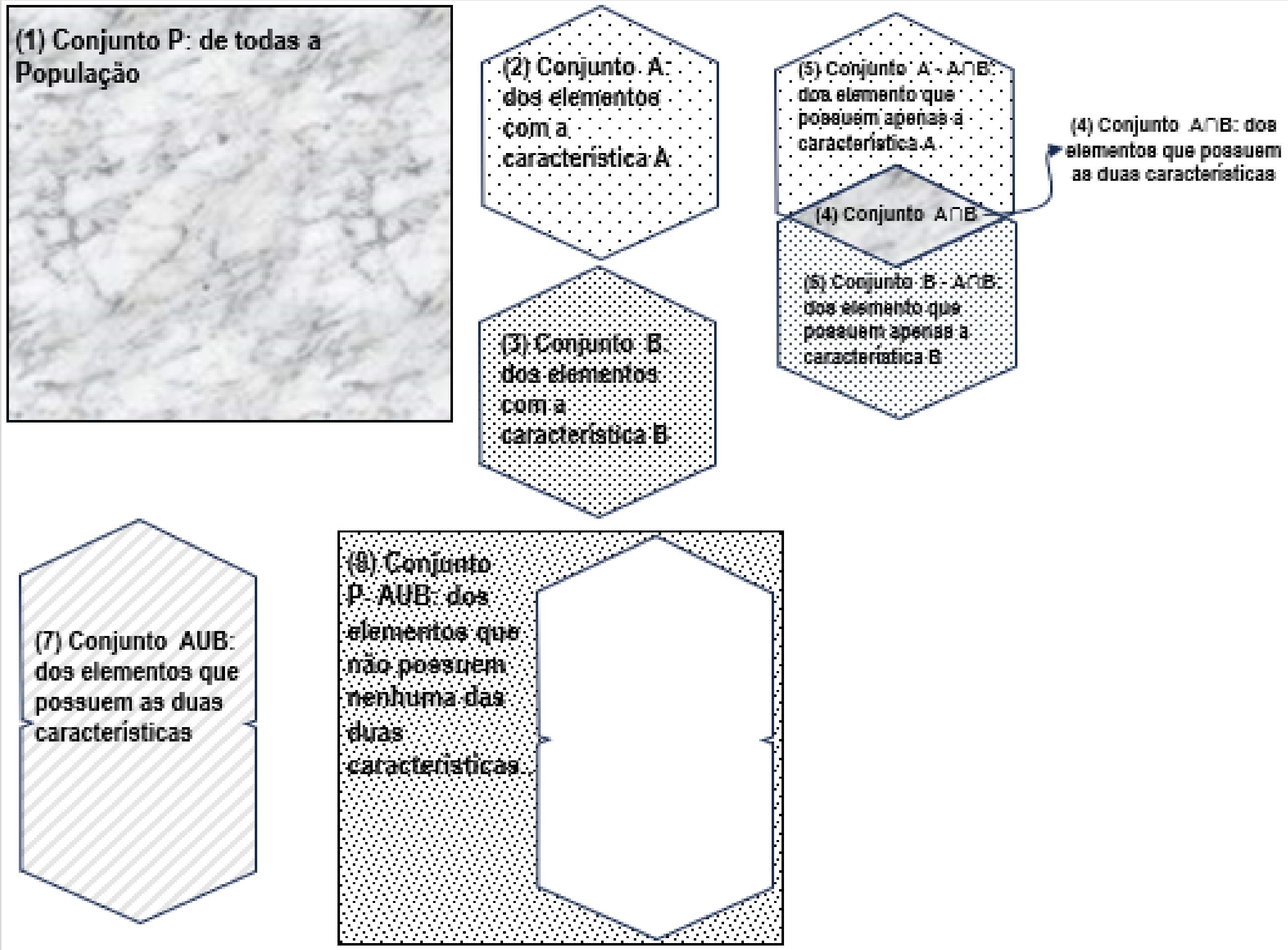


Figura:

Equações:

- (item 4): n(**A**U**B**) = n(**A**) + n(**B**) - n(**A**∩**B**);
- (item 5): n(**P** – **A**U**B**) = n(**P**) - n(**A**U**B**);
- (item 6): n(**A** – **A**∩**B**) = n(**A**) - n(**A**∩**B**);
- (item 7): n(**B** – **A**∩**B**) = n(**B**) - n(**A**∩**B**);

Além das 7 possibilidades descritas acima, existem outras que serão vistas mais adiante.

1.7. Operações com Conjunto e Cardinalidade (Número de Elementos de um Conjunto) – ok1

Os problemas envolvendo conjuntos possuem a seguinte forma. Fazem referência a algumas características, duas ou três, existentes em uma população (característica A, B e C). Dados numéricos como a quantidade de elementos associados a algumas características, ou a alguma combinação delas, também são fornecidos. A partir desses dados, pede-se para calcular as quantidades de elementos associados a outras características, ou a uma combinação dessas outras características.

Esses tipos de problema abordam em geral, no máximo 3 características.

Vejamos um exemplo de problema.

(**COLOCAR UM EXEMPLO!**)

Para ajudar a solução desses problemas, será mostrada, na sequência, a notação de cardinalidade para vários casos, como conjuntos individuais, união de conjuntos, intersecção de conjuntos, etc. Além da notação, são mostrados como as cardinalidades desses vários casos se relacionam.

Embora a solução desses tipos de problemas não obrigue o aluno a usar a notação e nem ter um conhecimento mais formal da relação entre os vários casos de cardinalidade, o seu uso ajuda a organizar a solução, proporcionando uma visão bem clara de quais foram os dados fornecidos e o que deve ser calculado.

Para indicar a cardinalidade, ou o número de elementos do conjunto, a notação usada é a mostrada no exemplo abaixo **n(letra que símboliza o conjunto).** Por exemplo, a cardinalidade do conjunto A é **n(A).**

O que faremos abaixo é, através de exemplos, mostrar como são feitos os cálculos de alguns casos de cardinalidade. Para isso, serão usados dois conjuntos A e B.

A = {1, 2, 4, 5, 7, 9} ➔ cardinalidade do conjunto A, ou número de elementos do conjunto A é **n(A) = 6**

B = {1, 2, 3, 8} ➔ cardinalidade do conjunto B, é **n(B) = 4**

$AUB = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ ➔ cardinalidade do conjunto AUB, é **$n(AUB) = 8$**

$A \cap B = \{1, 2\}$ ➔ cardinalidade do conjunto AUB, **é $n(A \cap B) = 2$**

$A – B = \{4, 5, 7, 9\}$ ➔ cardinalidade do conjunto $A – B$ = **$n(A – B) = 4$**

$B – A = \{3, 8\}$ ➔ cardinalidade do conjunto $B – A$ = **$n(B – A) = 2$**

Agora, vamos verificar a relação que existe entre esses números.

Para montar o conjunto **AUB**:

Passo 1a: fazer a junção dos dois conjuntos: Junção de A e B = {1, 2, 4, 5, 7, 9 junto com 1, 2, 3, 8}. Nessa junção, existem 6 + 4 = 10 elementos;

Passo 2a: retirar da junção de A e B os elementos comuns aos dois conjuntos, que são os elementos 1 e 2, ou seja, dois elementos. Junção de A e B – elementos comuns = 10 – 2 = 8

Passo 3a: calcular a união de A e B, AUB. A união fica com 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}, ou seja, $n(AUB) = 8$

O cálculo feito no **Passo 3a** pode ser feito da seguimte forma:

$n(AUB) = n(A) + n(B) – n(A \cap B) = 6 + 4 – 2 = 8$ ➔ $n(AUB) = 8$

Para montar o conjunto **A - B**:

Passo 1b: retirar do conjunto A, os elementos comuns entre A e B: {~~1~~, ~~2~~, 4, 5, 7, 9}

Passo 2b: reescrever $A – B = \{4, 5, 7, 9\}$. Assim, $n(A – b) = 4$

O cálculo feito no **Passo 2b** pode ser feito da seguimte forma:

$n(A – B) = n(A) – n(A \cap B) = 6 – 2 = 4$ ➔ $n(A - B) = 4$

Um raciocínio parecido, pode ser feito para calcular **$n(B – A)$**:

$n(B – A) = n(B) – n(A \cap B) = 4 – 2 = 2$

Resumo:

$n(AUB) = n(A) + n(B) – n(A \cap B)$

$n(A – B) = n(A) – n(A \cap B)$

$n(B – A) = n(B) – n(A \cap B)$

1.8. Propriedades das Operações com Conjuntos – ok1

Segue abaixo, uma lista com a descrição das propriedades dos conjuntos.

Properties of Sets

Let A, B and C are sets, U is universal set and ϕ is an empty set.

Identify	Name
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative Laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative Laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive Laws
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	Identity Laws
$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \phi$	Complement Laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent Laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption Laws
$(\bar{\bar{A}}) = A$	Double Complement Law
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Domination Laws
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgan's Laws

1.9. Problemas com Conjuntos e Diagrama de Venn – Abordagem 2 Conjuntos – ok1

Nos problemas envolvendo conjuntos, são formuladas questões sobre certas características associadas a grupos pertencentes a essa população.

Em geral, os problemas costumam abordar no máximo 3 características, mas neste item, vamos nos ater aos que abordam 2 características.

ATENÇÃO: Em problemas deste tipo é muito importante atentar para o seguinte fato. Quando um problema menciona, que dentro de uma população, uma certa característica está associada a um sub-grupo dela, é importante ler com atenção o que foi mencionado. Se no enunciado do problema houver a informação um sub-grupo:

- <u>possui a característica **A**</u>, isso significa que, dentro dele, podem existir elementos:
    - que possuem outras características, além da **A** e
    - que possuem apenas a característica **A**
- <u>possui apenas a característica **A**</u>, isso significa que os elementos, dentro dele, não possuem nenhuma outra característica além da **A**.

Isso já foi abordado no item **1.6**.

Vejamos um exemplo.

Problema P(1.8.1): Em um colégio, de 100 alunos, 80 gostam de sorvete de chocolate, 70 gostam de sorvete de creme e 60 gostam dos dois sabores. Quantos alunos não gostam de nenhum dos dois sabores?

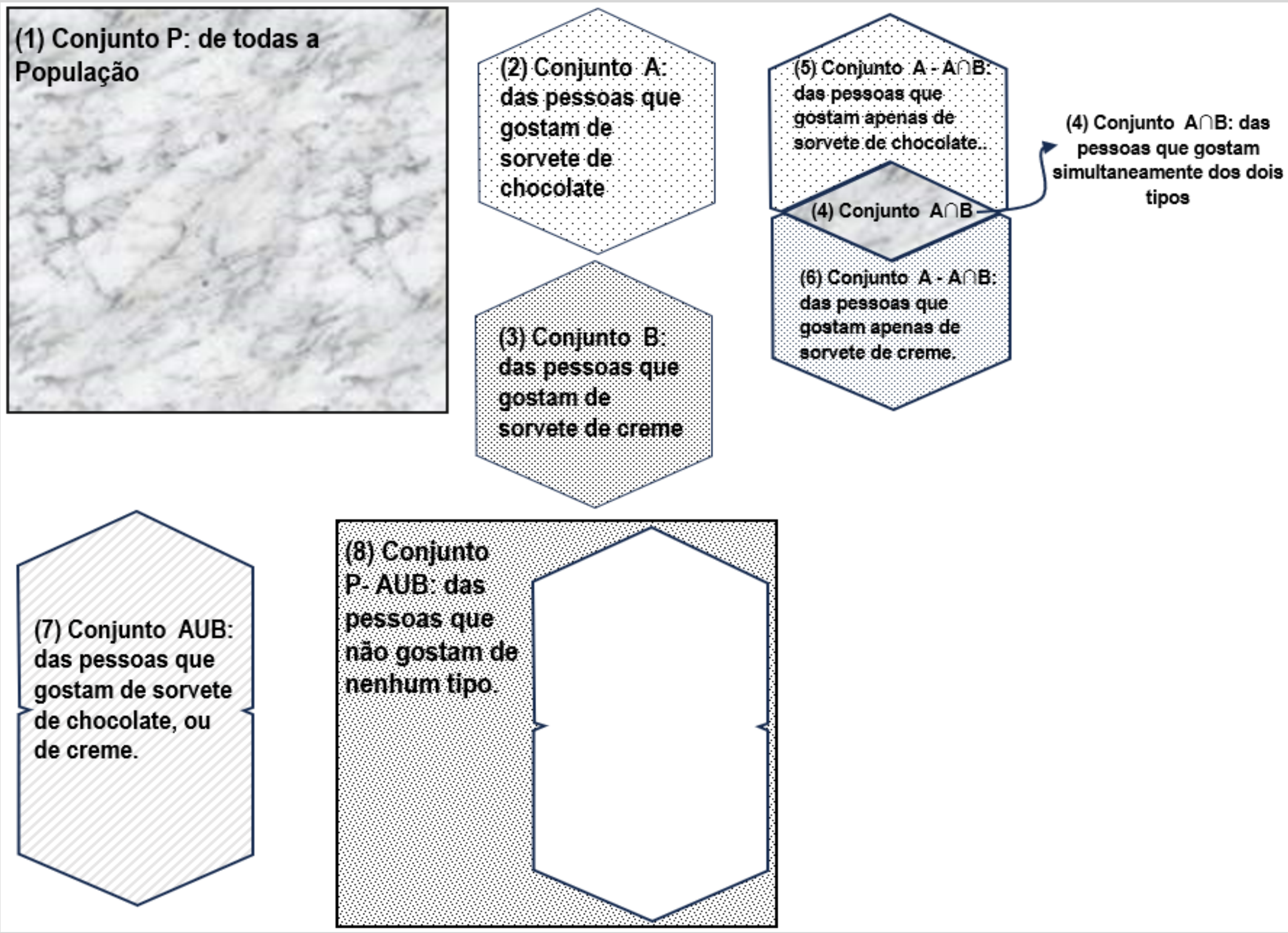
As características mencionadas aqui são as preferências pelo sorvete de chocolate (característica **A**) e de creme (característica **B**).

Podemos denominar os conjuntos:

1. do total de alunos, como o conjunto da População **P**, n(**P**) = 100;
2. dos que gostam de sorvete de chocolate, como o conjunto **A**, n(**A**) = 80;
3. dos que gostam de sorvete de creme, como o conjunto **B**, n(**B**) = 70;

4. dos que gostam de sorvete de chocolate e creme, como o conjunto **A∩B**, n(**A∩B**) = 60;
5. dos que não gostam apenas de sorvete de chocolate, como o conjunto **A - A∩B**, n(A - **A∩B**) = ?;
6. dos que não gostam apenas de sorvete de creme, como o conjunto **B - A∩B**, n(A - **A∩B**) = ?;
7. dos que gostam dos dois sabores **A**U**B**, n(**A**U**B**) = ?;
8. dos que não gostam nem de chocolate nem de creme **P - A**U**B**, n(**P** - **A**U**B**) = ?;

Graficamente isso está representado na Figura , abaixo.



Figura

Solução do problema P(1.8.1): para determinar número de alunos que não gostam de nenhum dos dois sabores de sorvete, vamos lembrar do item **1.6** (parte **Cardinalidades associadas a sub-conjuntos da população e a relação entre elas**), que mostra algumas equações relacionando cardinalidades. O conjunto que expressa o que foi solicitado no problema é o **P** – **A**∪**B**, cuja cardinalidade é dada pela equação:

n(**P** – **A**∪**B**) = n(**P**) – n(**A**∪**B**) (**eq. 1**)

A equação da união dos conjuntos **A** e **B** é:

n(**A**∪**B**) = n(**A**) + n(**B**) - n(**A**∩**B**) (**eq. 2**)

Substituindo (**eq. 2**) em (**eq. 1**), temos:

n(**P** – **A**∪**B**) = n(**P**) – n(**A**) + n(**B**) - n(**A**∩**B**) (**eq. 3**)

Substituindo os valores dados em (**eq. 3**), temos:
n(**P** – **A**∪**B**) = 100 – (80 + 70 - 60)) = 100 – (90)
n(**P** – **A**∪**B**) = 10

R (**P.1.8.1)**: o número de alunos, que não gostam de nenhum dos dois sabores de sorvete, é **10**.

1.10. Possibilidades de informações em problemas envolvendo dois conjuntos – ok1 -

Na sequência, serão apresentados, através do diagrama de Venn – Euler, da Figura **1.7.3**, todas as informações possíveis de serem extraídas de um problema parecido com o **P.1.7.1** acima.

Para isso, será apresentada uma sequência de figuras a partir do diagrama da **Figura 1.7.3**. Essas figuras mostrarão o diagrama com várias de suas partes preenchidas com textura, para ilustrar os vários tipos de conjuntos relacionados às várias informações.

Além da representação geométrica dos conjuntos **P**, **A** e **B** no diagrama, vamos definir elementos para esses conjuntos e mostra-los no formato {} para que possamos fazer algumas considerações sobre os cálculos das cardinalidades.

Façamos, então:

- **P**: {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}

- **A**: {e_1, e_2, e_3, e_4}
- **B**: {e_3, e_4, e_5, e_6}

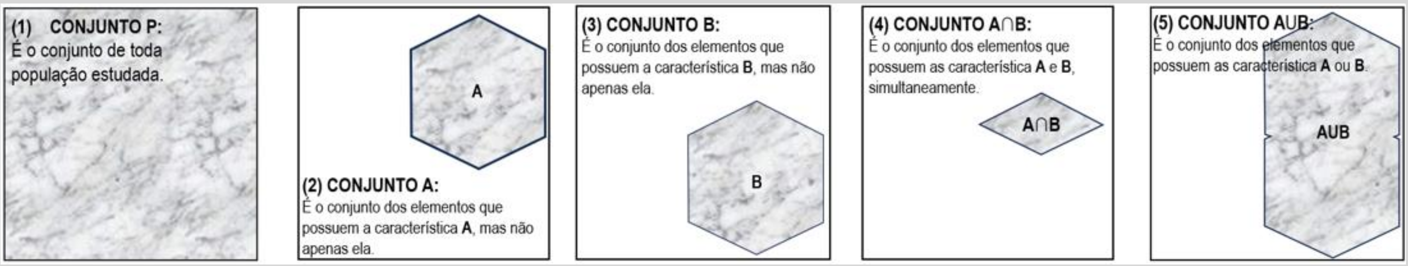


Figura 1.8.4: Casos de 1 a 5

Para os casos de 1 a 5 da **Figura 1.8.4**, vamos verificar como podemos chegar à cardinalidade do conjunto mostrado em cada um deles, considerando os conjuntos **P**, **A** e **B** apresentados no formato { }.

- **Caso 1**: Conjunto **P**
  - **Descrição:** Conjunto do total de elementos da população.
  - **Elementos de P:** {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}
  - **Cardinalidade de P:** n(**P**) = **8.** Para se chegar a este número, basta contar os elementos do conjunto **P**.
  -
- **Caso 2**: Conjunto **A**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem a característica **A**, mas não apenas ela.
  - **Elementos de A:** {e_1, e_2, e_3, e_4}
  - **Cardinalidade de A:** n(**A**) = **4.** Para se chegar a este número, basta contar os elementos do conjunto **P**.

- **Caso 3**: Conjunto **B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem a característica **B**, mas não apenas ela.
  - **Elementos de B:** {e_3, e_4, e_5, e_6}
  - **Cardinalidade de B:** n(**B**) = **4.** Para se chegar a este número, basta contar os elementos do conjunto **B**.

- **Caso 4**: Conjunto **A∩B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem as características **A** e **B**.
  - **Elementos de A∩B:** {e_3, e_4}.

   - **Cardinalidade de A∩B:** n(**A**∩**B**) = **2.** Para se chegar a este número, é necessário olhar os conjuntos **A** e **B** e identificar quais são os elementos comuns aos dois. Não há como calcular a cardinalidade n(**A**∩**B**) apenas conhecendo as cardinalidades de n(**A**) e n(**B**).

- **Caso 5**: Conjunto **A**U**B**
   - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem a característica **A** ou a **B**.
   - **Elementos de A**U**B:** {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}
   - **Cardinalidade de A**U**B:** n(**A**U**B**) = **6.** Para se chegar a este número, é necessário juntar os elementos dos conjuntos **A** e **B**, sem duplicar os elementos comuns aos dois, no conjunto resultante. Neste caso, para se chegar ao valor n(**A**U**B**) basta somar as quantidades dos conjuntos A e B e subtrair a quantidade dos elementos comuns, para que não sejam contados duas vezes.

     n(**A**U**B**) = n(A) + n(B) – n(**A**∩**B**) = 4 + 4 – 2 = 8 – 2 = **6**

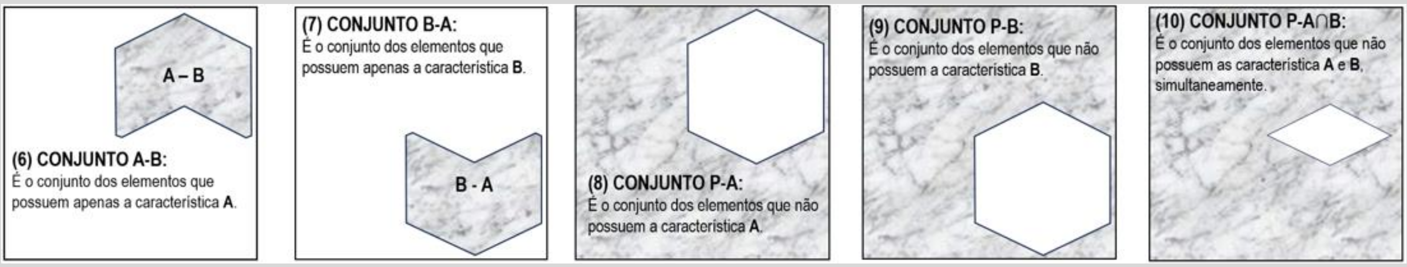


Figura 1.8.5:

- **Caso 6**: Conjunto **A** - **B**
   - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem apenas a característica **A.**
   - **Elementos de A - B:** {e_1, e_2}. Aqui, cabe a seguinte consideração. Quando subtraímos um conjunto de outro, o que fazemos, em última análise, é retirar do conjunto que está no papel de minuendo (neste caso, o conjunto **A**) os elementos comuns entre **A** e **B**, ou seja, os elementos de **A**∩**B**. Então, **A** – **B** pode ser escrito como **A** – **A**∩**B**. Dessa forma,

     n(**A** – **B**) = n(**A** – **A**∩**B**)

ATENÇÃO: O que não pode ser feito é considerar sempre que n(**A** – **B**) = n(**A**) – n(**B**).

Mas se o subtraendo (elemento que vem depois o sinal de -) estiver na forma de intersecção de do {conjunto minuendo}∩{conjunto subtraendo}, como **A**∩**B**, então o cálculo de n(**A** – **B**) pode ser feito da seguinte forma:

n(**A** – **B**) = n(**A** – **A**∩**B**) = n(**A**) – n(**A**∩**B**)

  - **Cardinalidade de P:** n(**A** - **B**) = **4.** Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**A** – **B**) = n(**A** – **A**∩**B**) = n(**A**) – n(**A**∩**B**) = 4 – 2 = **2**

- **Caso 7**: Conjunto **B** - **A**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem apenas a característica **B.**
  - **Elementos de B - A:** {e_5, e_6}. Aqui, valem as mesmas considerações feitas no **Caso 6**.
  - **Cardinalidade de B - A:** n(**A - B**) = **2.** Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**B** – **A**) = n(**B** – **A**∩**B**) = n(**B**) – n(**A**∩**B**) = 4 – 2 = **2**

- **Caso 8**: Conjunto **P** - **A**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem a característica **A**.
  - **Elementos de P** - **A**: {e_5, e_6, e_7, e_8}.
  - **Cardinalidade de P** - **A**: n(**P - A**) = **4.** Para se chegar a este número, basta, como vimos anteriormente, fazer:

    n(**P** – **A**) = n(**P** – **P**∩**A**), mas como **A** é um sub-conjunto de **P**, **P**∩**A = A**. Então,

    n(**P** – **P**∩**A**) = n(**P** – **A**) = n(**P**) – n(**A**) = 8 – 4 = **4**

- **Caso 9**: Conjunto **P** - **B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem a característica **B**.
  - **Elementos de P** - **B**: $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
  - **Cardinalidade de P** - **B**: n(**P - B**) = **4**. Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**P** – **B**) = n(**P** – **P**∩**B**), mas como **B** é um sub-conjunto de **P**, **P**∩**B = B**. Então,

    n(**P** – **P**∩**B**) = n(**P** – **B**) = n(**P**) – n(**B**) = 8 – 4 = **4**

- **Caso 10**: Conjunto **P** - **A**∩**B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem a característica **A** e **B**, juntas.
  - **Elementos de P** - **A**∩**B**: $\{e_1, e_2, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.
  - **Cardinalidade de P** - **A**∩**B**: n(**P - A**∩**B**) = **6**. Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**P** – **A**∩**B**) = n(**P** – **P**∩**A**∩**B**), mas como **A**∩**B** é um sub-conjunto de **P**, **P**∩**A**∩**B = A**∩**B**. Então,

    n(**P** – **P**∩**A**∩**B**) = n(**P** – **A**∩**B**) = n(**P**) – n(**A**∩**B**) = 8 – 2 = **6**

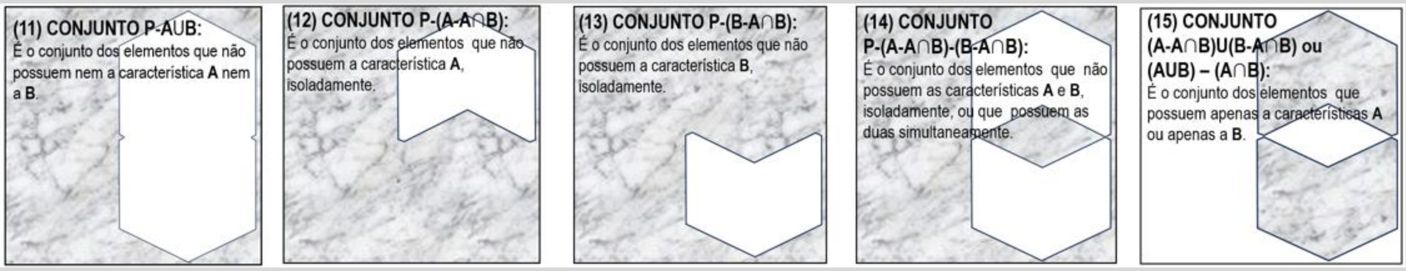


Figura 1.8.6:

- **Caso 11**: Conjunto **P** - **A**U**B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem a nem característica **A** e nem a **B**.
  - **Elementos de P** - **A**U**B**: $\{e_7, e_8\}$.
  - **Cardinalidade de P** - **A**U**B**: n(**P - A**U**B**) = **2**. Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**P** – **A**U**B**) = n(**P** – **P**∩**A**U**B**), mas como **A**U**B** é um sub-conjunto de **P**, **P**∩**A**U**B = A**U**B**. Então,

    n(**P** – **P**∩**A**U**B**) = n(**P** – **A**U**B**) = n(**P**) – n(**A**U**B**) = 8 – 6 = **2**

- **Caso 12**: Conjunto $\mathbf{P} - (\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem apenas a característica **A**, isoladamente. Eles possuem a característica **A** e **B**, juntas ou não possuem nenhuma das duas.
  - **Elementos de P - (A-A∩B)**: $\{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.
  - **Cardinalidade de P - (A-AUB)**: $n(\mathbf{P} - (\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = \mathbf{6}$. Para se chegar a este número, basta fazer:

    $n(\mathbf{P} - (\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P} - \mathbf{P}\cap(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}))$, mas como $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ é um sub-conjunto de **P**,

    $\mathbf{P}\cap(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = \mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$. Então,

    $n(\mathbf{P} - \mathbf{P}\cap(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P} - (\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P}) - n(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = n(\mathbf{P}) - (n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) =$

    $= n(\mathbf{P}) - n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{A}\mathrm{U}\mathbf{B}) = 8 - 4 + 2 = \mathbf{6}$.

- **Caso 13**: Conjunto $\mathbf{P} - (\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que não possuem apenas a característica **B**, isoladamente. Eles possuem a característica **A** e **B**, juntas ou não possuem nenhuma das duas.
  - **Elementos de P - (B-A∩B)**: $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8\}$
  - **Cardinalidade de P - (B-AUB)**: $n(\mathbf{P} - (\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = \mathbf{6}$. Para se chegar a este número, basta fazer:

    $n(\mathbf{P} - (\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P} - \mathbf{P}\cap(\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}))$, mas como $\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ é um sub-conjunto de **P**,

    $\mathbf{P}\cap(\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = \mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$. Então,

    $n(\mathbf{P} - \mathbf{P}\cap(\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P} - (\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) = n(\mathbf{P}) - n(\mathbf{B}\text{-}\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = n(\mathbf{P}) - (n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})) =$

    $= n(\mathbf{P}) - n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{A}\mathrm{U}\mathbf{B}) = 8 - 4 + 2 = \mathbf{6}$.

- **Caso 14**: Conjunto (**P – AUB**)U(**A∩B**)
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem apenas a característica **A** e **B**, isoladamente ou que possuem as duas características **A** e **B**, juntas.
  - **Elementos de** (**P – AUB**)U(**A∩B**): $\{e_3, e_4, e_7, e_8\}$
  - **Cardinalidade de** (**P–AUB**)U(**A∩B**): n((**P–AUB**)U(**A∩B**)) = **4**. Para se chegar a este número, basta fazer:

    n((**P–AUB**)U(**A∩B**)) = n(**P–AUB**) + n(**A∩B**) – n((**P–AUB**)∩(**A∩B**)). Mas

    n((**P–AUB**)∩(**A∩B**)) = 0.

    Então, n((**P–AUB**)U(**A∩B**)) = n(**P–AUB**) + n(**A∩B**)) = 2 + 2 = **4**

- **Caso 15**: Conjunto **AUB – A∩B**
  - **Descrição:** Conjunto dos elementos da população que possuem apenas a característica **A** ou apenas a **B**.
  - **Elementos de AUB – A∩B** = $\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$
  - **Cardinalidade de AUB – A∩B =** n(**AUB – A∩B**) = **4**. Para se chegar a este número, basta fazer:

    n(**AUB – A∩B**) = n(**AUB**) **-** n(**A∩B**). Mas n(**AUB**) **=** n(**A**) + n(**B**) - n(**A∩B**). Então,

    n(**AUB – A∩B**) **=** n(**A**) + n(**B**) - n(**A∩B**) - n(**A∩B**) = 4 + 4 - 2 - 2 = **4**

1.11. Possibilidades de fazer agrupamentos dentro de uma população em função das características – ok1

Neste item iremos explorar as várias maneiras de fazer agrupamentos dentro de uma população, levando em conta o número de características identificadas dentro dela.

Caso com 1 característica.

Por exemplo, dentro de uma população, na qual foi identificada uma característica **A**, é possível segregar:

- o conjunto dos elementos que possuem essa característica e
- o conjunto dos elementos que não possuem essa característica.

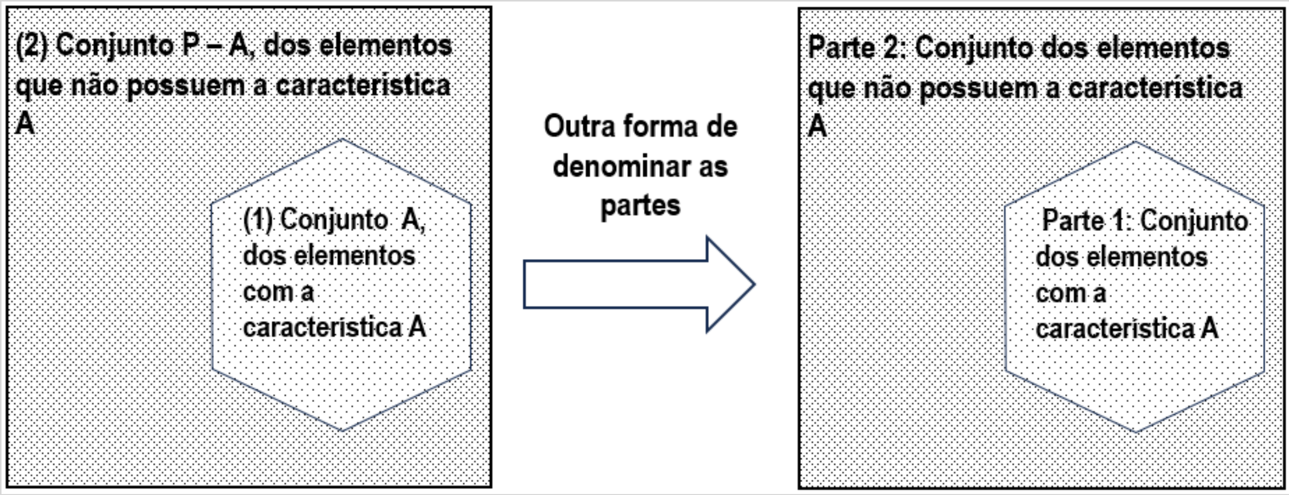


Figura x:

Para determinar o número de possibilidades em função do número de características, um procedimento que pode ser feito é, a partir do diagrama de Venn associado ao caso, identificar todas as partes que podem ser isoladas, ou seja, todas a partes que não possuem intersecção com nenhuma outra (partes disjuntas), como as partes 1 e 2 da Figura x.

Considerando essas 2 partes, é possível montar uma "tabela verdade", que mostra as várias possibilidades de combinação dessas partes, para a formação dos diferentes grupos. Em cada uma das linhas, são colocadas, embaixo de cada coluna *Parte n*, o valor **0**, caso essa parte não participe do resultado final, e **1**, no caso dela participar.

Possibilidades de agrupamentos em uma população onde alguns elementos possuem a característica **A**			
Possib.	*Parte 1*	*Parte 2*	*Conjunto resultante ou agrupamento*
1	**0**	**0**	"Conjunto vazio": não contém nenhuma das partes
2	**0**	**1**	Conjunto **P – A**: contém apenas a os elementos da Parte 2
3	**1**	**0**	Conjunto **A**: contém apenas a os elementos da Parte 1
4	**1**	**1**	Conjunto de toda a população: contém os elementos da Parte 1 e 2

Tabela y:

A Figura x, mostra que é possível construir 2 partes, quando dentro de uma população é identificado um grupo com uma característica (no exemplo, característica **A**).

A Tabela y, mostra que, com essas duas partes, é possível formar 4 conjuntos.

Vamos anotar esse resultado na tabela abaixo.

Características de grupos dentro da população	*Partes*	*Conjuntos resultantes ou agrupamentos*
1	2	4

Tabela z:

Caso com 2 características.

Agora, vamos supor que dentro de uma população foram identificados 2 grupos, um com a característica **A** (mas não apenas com essa característica) e outro com a característica **B** (mas não apenas com essa característica, também). Nesse caso, é possível identificar 4 partes.

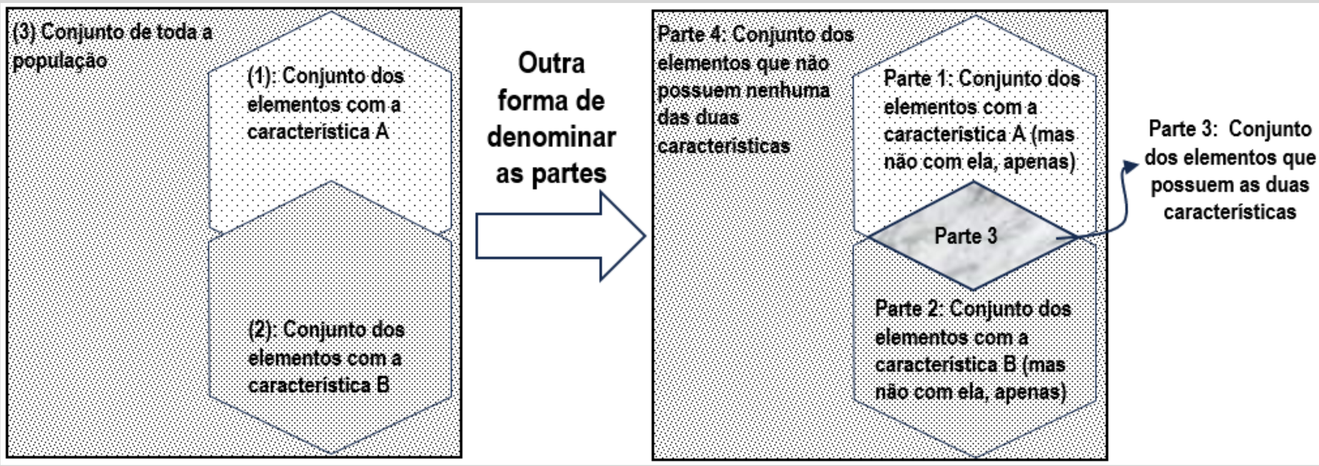


Figura w:

Seguindo o método / raciocínio anterior podemos montar a tabela abaixo.

Possibilidades de agrupamentos em uma população onde alguns elementos possuem as características **A** e **B**					
Possib.	*Parte 1*	*Parte 2*	*Parte 3*	*Parte 4*	Conjunto resultante ou agrupamento
1	**0**	**0**	**0**	**0**	"Conjunto vazio": não contém nenhuma das partes
2	**0**	**0**	**0**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das 2 características (conjunto **P-AUB**)
3	**0**	**0**	**1**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem as 2 características (conjunto **A∩B**)
4	**0**	**0**	**1**	**1**	Conjunto dos elementos que possuem as 2 características (conjunto **A∩B**) ou não possuem nenhuma
5	**0**	**1**	**0**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem apenas a característica **B** (conjunto **B-A∩B**)
6	**0**	**1**	**0**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das 2 características ou que possuem apenas a **B** (conjunto **PU(B-A∩B)**)
7	**0**	**1**	**1**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem apenas a característica **B** (conjunto **B**)
8	**0**	**1**	**1**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das 2 características ou que possuem a **B** (conjunto **P-(A- A∩B)**)
9	**1**	**0**	**0**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem apenas a característica **A** (conjunto **A-A∩B**)
10	**1**	**0**	**0**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das 2 características ou que possuem apenas a **A** (conjunto **PU(A - A∩B)**)
11	**1**	**0**	**1**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem a característica **A** (conjunto **A**)
12	**1**	**0**	**1**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das duas características ou que possuem a característica **A** (conjunto **P** – (**B - A∩B**))
13	**1**	**1**	**0**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem apenas a característica **A** ou apenas a **B** (conjunto **AUB - A∩B)**
14	**1**	**1**	**0**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das duas características ou apenas a característica **A** ou apenas a **B** (conjunto **PU(AUB - A∩B)**)
15	**1**	**1**	**1**	**0**	Conjunto dos elementos que possuem a característica **A** ou **B** (conjunto **AUB**)
16	**1**	**1**	**1**	**1**	Conjunto dos elementos que não possuem nenhuma das duas características ou possuem alguma delas ou o conjunto de toda a população (conjunto **P**)

Tabela w:

A Figura w, mostra que é possível construir 4 partes quando dentro de uma população na qual são identificados grupos com duas características (no exemplo, características **A** e **B**).

A Tabela y, mostra que, com as 4 partes, é possível formar 16 conjuntos.

Características de grupos dentro da população	Partes	Conjuntos resultantes ou agrupamentos
1	2	4
2	4	16

Tabela z:

Caso com 3 características.

Agora, vamos supor que dentro de uma população foram identificados 3 grupos, um com a característica **A** (mas não apenas com essa característica), outro com a característica **B** (mas não apenas com essa característica, também) e outro com a característica **C** (mas não apenas com essa característica, também). Nesse caso, é possível identificar 8 partes.

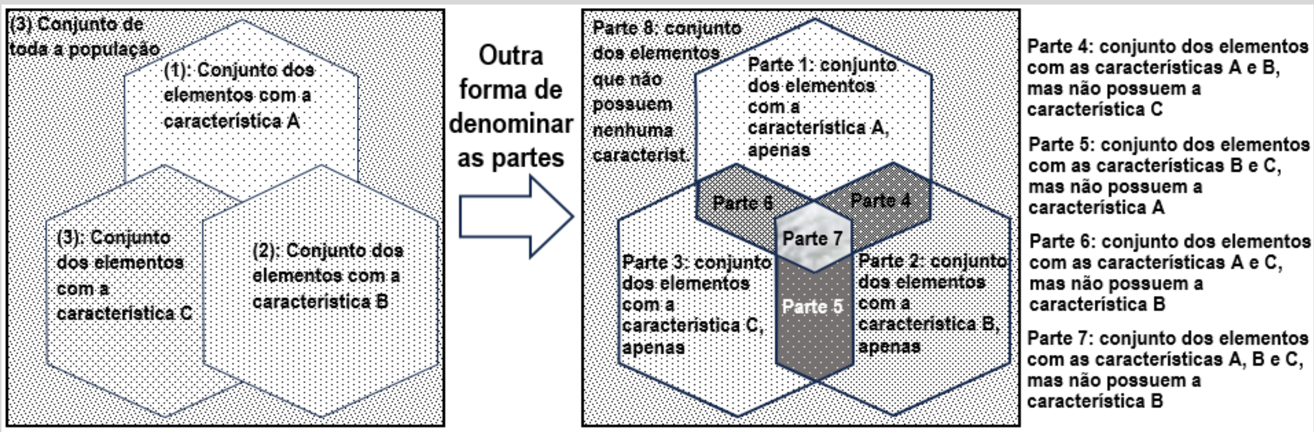


Figura K:

Seguindo o método / raciocínio anterior podemos montar a tabela abaixo.

Possibilidades de agrupamentos em uma população onde alguns elementos possuem as características **A** e **B**									
Pos sib.	*Part e 1*	*Part e 2*	*Part e 3*	*Part e 4*	*Part e 5*	*Parte 6*	*Part e 7*	*Part e 8*	Conjunto resultante ou agrupamento
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	"Conjunto vazio": não contém nenhuma das partes
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
256	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	Conjunto de toda a população (conjunto **P**)

Tabela k:

A Figura k, mostra que é possível construir 8 partes quando dentro de uma população na qual são identificados grupos com três características (no exemplo, características **A**, **B** e **C**).

A Tabela y, mostra que, com as 4 partes, é possível formar 256 conjuntos.

Características de grupos dentro da população	Partes	Conjuntos resultantes ou agrupamentos
1	2	4
2	4	16
3	8	256

Tabela z:

Generalizando:

Características de grupos dentro da população (**n**)	Partes (**p**)	Conjuntos resultantes ou agrupamentos (**c**)
1	2	4
2	4	16
3	8	256
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\mathbf{p = n^2 - n + 2}$	$\mathbf{c = 2^p}$

Tabela z:

Então, em uma população onde existem grupos com **n** características diferentes, é possível identificar **p** partes (com $\mathbf{p = n^2 - n + 1}$) isoladas e, com elas, formar **c** agrupamentos diferentes ($\mathbf{c = 2^p}$).

Cálculo do número de partes p em função do número de características n:

Vamos supor que a equação de p em função de n possui o seguinte formato:

$p = an^2 + bn + c$ (**eq. 1**)

Vamos ver como ficam os valores de p em função de n:

n	**p**	Equação $\mathbf{p = an^2 + bn + c}$
1	2	$an^2 + bn + c \Rightarrow a + b + c = 2$ (**eq. 2**)
2	4	$an^2 + bn + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 4$ (**eq. 3**)
3	8	$an^2 + bn + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 8$ (**eq. 4**)

Fazendo (**eq. 3**) – (**eq.2**): $3a + b = 2$ (**eq. 5**)

Fazendo (**eq. 4**) – (**eq.2**): $8a + 2b = 6$ (**eq. 6**)

De (**eq. 5**): $b = 2 - 3a$ (**eq. 7**)

Substituindo (**eq. 7**) em (**eq. 6**): $8a + 2(2 - 3a) = 6 \Rightarrow 8a + 4 - 6a = 6 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$ (**eq. 8**)

Substituindo (**eq. 8**) em (**eq. 7**): $b = 2 - 3 \Rightarrow b = -1$ (**eq. 9**)

Substituindo (**eq. 8**) e (**eq. 9**) em (**eq. 2**): $2 - 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$ (**eq. 10**)

Substituindo (**eq. 8**), (**eq. 9**) e (**eq. 10**) na equação $\mathbf{p = an^2 + bn + c}$, temos:

$\mathbf{p = n^2 - n + 1}$