IM005 - Aritmética (Operações fundamentais)

1. Operações Aritméticas – ok1

Sob o ponto de vista da aritmética, uma operação pode ser definida como uma regra ou procedimento matemático, aplicado sobre dois ou mais números para gerar um outro número chamado de resultado.

As operações aritméticas são:

- adição,
- subtração,
- multiplicação,
- divisão,
- potênciação,
- radiciação,
- exponencição e
- logaritmação.

Algumas características e possiblidades relacionadas às operações aritméticas vão depender do conjunto do qual são extraídos os números para gerar o resultado. Por exemplo, nem sempre a subtração de dois números naturais, gera um outro número natural. Podemos dizer o mesmo sobre a divisão. Então, quando o conjunto dos números naturais é usado, existem mais restrições do que quando se usa o conjunto dos números reais ou complexos. Isso, será visto mais adiante.

Agora, a divisão por zero não pode ser feita de maneira alguma, independente do conjunto usado.

As operações possuem propriedades, que são um conjunto de regras que descrevem como os números podem ser combinados quando as usamos.

2. Adição e suas Propriedades – ok1

A adição é a operação realizada sobre dois ou mais números (parcelas) para encontrar o resultado denominado soma. Por exemplo, 2 + 3 = 5. Na adição, qualquer que seja o conjunto a que perteçam as parcelas, o resultado sempre irá pertencer ao conjunto.

Propriedades da adição:

- Comutatividade: A ordem dos números não altera o resultado da adição. Em outras palavras, $a + b = b + a$ para quaisquer números a e b.
- Associatividade: A associação dos números não altera o resultado da adição. Em outras palavras, $(a + b) + c = a + (c + b)$ para quaisquer números a e b.
- Elemento neutro: Existe um número especial, chamado de elemento neutro da adição, que não altera outro número quando adicionado a ele. Esse número é o zero. Para qualquer número $a + 0 = a$.
- Inverso Aditivo: Para cada número real a, existe um número oposto, chamado de inverso aditivo ou negativo de a, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$. Essa propriedade não se aplica a números pertencentes ao conjunto dos números naturais, uma vez que nele não há números negativos.

Denominações dos termos de uma adição:

Os termos da adição são chamados de parcelas.

Operações Fechadas Dependendo do Conjunto em que São Feitas

Operação	Naturais	Inteiros	Fracionários	Reais	Complexos
Adição $a + b = c$	Restrições quanto a valores: não há				
Subtração $a - b = c$	Restrições quanto a valores: $a > b$				
Multiplicação $a.b = c$	Restrições quanto a valores: não há				
Divisão $a/b = c$	Restrições quanto a valores: • $b \|= 0$ • a deve ser múltiplo de b				
Potenciação (exponenciação) $a^n = b$	Restrições quanto a valores: não há				
Radiciação $a^{1/n} = b$	Restrições quanto a valores: a deve ser um valor tal que $a = d^n$, com a, d e n inteiros.				
Logaritmação log_b(a) = c	Restrições quanto a valores: $b>0$, e $a >0$, tal que $a = b^c$, com b e c inteiros.				

Operação de adição: restrições conforme o conjunto em que é usada.

Operação	Naturais	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais	Complexos
Adição a + b = c	Fechada	Fechada	Fechada	Não fechada	Fechada	Fechada
Subtração a - b = c	Não fechada	Fechada	Fechada	Não fechada	Fechada	Fechada
Multiplicação a.b = c	Fechada	Fechada	Fechada	Não fechada	Fechada	Fechada
Divisão a/b = c	Não fechada	Não fechada	Fechada	Não fechada	Fechada	Fechada
Potenciação (exponenciação) $a^n = b$	Fechada	Não fechada	Fechada	Não fechada		
Radiciação $a^{1/n} = b$	Restrições quanto a valores: a deve ser um valor tal que a = d^n, com a, d e n inteiros.					
Logaritmação log_b(a) = c	Restrições quanto a valores: b>0, e a >0, tal que a = b^c, com b e c inteiros.					

3. Subtração e suas Propriedades – ok1

A subtração é a operação de encontrar a diferença entre dois números. Por exemplo, 5 - 3 = 2. Na subtração, diferentemente da adição, dependendo dos valores e do conjunto a que pertençam os números envolvidos, o resultado poderá não pertencer ao mesmo conjunto desses números. Por exemplo, se considerarmos o conjunto dos números naturais, a diferença 3 - 5 = -2 não irá pertencer a esse conjunto. A maneira rigorosa de expressar este fato é que a subtração não é uma operação fechada dentro do conjunto dos números naturais.

Propriedades da subtração:

- Não comutatividade: A ordem dos números altera o resultado da subtração. Em outras palavras, a - b pode ser diferente de b - a. Por exemplo, 8 - 3 = 5 é diferente de 5 - 8 = -3.
- Não associatividade: A associação dos números altera o resultado da subtração. Em outras palavras, (a - b) = c pode ser diferente de a - (c - b). Por exemplo, (8 - 4) - 3 = 4 - 3 = 1. Já, 8 - (4 - 3) = 8 - 1 = 7
- Elemento neutro: Existe um número especial, chamado de elemento neutro da subtração, que não altera o número quando esse elemento é subtraído dele. Esse número é o zero. Para qualquer número a - 0 = a.

Denominações dos termos de uma subtração:

Os termos da subtração têm nomes específicos. O termo de onde a subtração é feita é chamado de "minuendo". O termo que é subtraído é chamado de "subtraendo". O resultado da subtração é chamado de "diferença".

Por exemplo, na expressão matemática "a - b", "a" é o minuendo, "b" é o subtraendo, e "a - b" é a diferença.

4. Multiplicação e suas Propriedades – ok1

A multiplicação é a operação de repetição de uma adição várias vezes. Por exemplo, 2 × 3 = 6, o que significa somar 2 três vezes (2 + 2 + 2 = 6) ou somar o 3 duas vezes (3 + 3 = 6).

Propriedades da multiplicação:

As propriedades da multiplicação são um conjunto de regras que descrevem como os números podem ser combinados usando a operação de multiplicação. Aqui estão as principais propriedades da multiplicação:

- <u>Comutatividade</u>: A ordem dos números não altera o resultado da multiplicação. Em outras palavras, axb = bxa, para quaisquer números a e b.
- Associatividade: A associação dos números não altera o resultado da multiplicação. Em outras palavras, (axb)xc=ax(bxc) para quaisquer números reais
- Elemento neutro da multiplicação: Existe um número especial, chamado de elemento neutro da multiplicação, que não altera outro número quando multiplicado por ele. Este número é 1. Para qualquer número real a, temos ax1 = 1xa = a
- Propriedade do Zero: Multiplicar qualquer número por zero resulta em zero. Em outras palavras, ax0=0 para qualquer número.
- Prioridade da multiplicação sobre a adição e subtração e equivalência em relação à divisão;

Denominações dos termos de uma multiplicação:

Os termos da multiplicação têm nomes específicos, dependendo do contexto em que são utilizados:

Multiplicando: O multiplicando é o número que está sendo multiplicado por outro número. Por exemplo, no cálculo de 2 * 3, o multiplicando é 2.

Multiplicador: O multiplicador é o número pelo qual o multiplicando está sendo multiplicado. No exemplo anterior, o multiplicador é 3.

Em uma expressão matemática como "a * b", "a" é o multiplicando e "b" é o multiplicador. Juntos, eles produzem o produto da multiplicação.

5. Divisão e suas Propriedades – ok1

A divisão é a operação de dividir um número por outro para encontrar quantas vezes o segundo número cabe no primeiro. Por exemplo, 6 ÷ 2 = 3, indicando que 6 pode ser dividido igualmente em 2 partes, resultando em 3.

Propriedades da divisão:

- Não comutatividade: A ordem dos números altera o resultado da divisão. Em outras palavras, a : b pode ser diferente de b ÷a. Por exemplo, 8 ÷ 4 = 2 é diferente de 4 ÷ 8 = ½ = 0,5.
- Não associatividade: A associação dos números altera o resultado da divisão. Em outras palavras, (a : b) : c pode ser diferente de a ÷ (c ÷ b). Por exemplo, (8 ÷ 4) ÷ 2 = 2 ÷ 2 = 1. Já, 8 ÷ (4 ÷ 2) = 8 ÷ 2 = 4.
- Elemento neutro: Existe um número especial, chamado de elemento neutro da divisão, que não altera o número dividido por ele. Esse número é o 1. Para qualquer número a, a ÷ 1 = a.
- Divisão de zero por qualquer número: esta divisão sempre dá zero;
- Impossibilidade de dividir qualquer número por zero: esta operação não é definida na aritmética;
- Prioridade da divisão sobre a adição e subtração e equivalência em relação à multiplicação.

Denominações dos termos de uma divisão:

Os termos da divisão também têm nomes específicos:

Dividendo: O dividendo é o número que está sendo dividido. Na expressão matemática "a ÷ b", "a" é o dividendo.

Divisor: O divisor é o número pelo qual o dividendo é dividido. No mesmo exemplo, "b" é o divisor.

O resultado da divisão é chamado de quociente. Assim, na expressão "a ÷ b", o resultado seria o quociente da divisão de "a" por "b".

6. Potenciação e suas Propriedades – ok1

A potenciação envolve a multiplicação repetida de um número por si mesmo. Por exemplo, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, onde 2 é elevado ao expoente 3.

Propriedades da potenciação:

- Produto de Potências de Mesma Base: Para potências com a mesma base, ao multiplicá-las, mantemos a base e somamos os expoentes. Em outras palavras, $(a^n)(a^m) = a^{(n + m)}$, onde a é a base e m e n são os expoentes.
- Quociente de Potências de Mesma Base: Para potências com a mesma base, ao dividir uma pela outra, mantemos a base e subtraímos os expoentes. Em outras palavras, $(a^n)/(a^m) = a^{(n - m)}$, onde a é a base e m e n são os expoentes.
- Potência de uma Potência: Ao elevar uma potência a outra potência, mantemos a base e multiplicamos os expoentes. Em outras palavras, $(a^n)^m = a^{n.m}$
- Propriedade do Expoente Zero: Qualquer número elevado a zero é igual a 1. Em outras palavras, $a^0 = 1$, para qualquer número a diferente de zero.
- Propriedade do Expoente Um: Qualquer número elevado a um é igual a ele mesmo. Em outras palavras, $a^1 = a$, onde a é qualquer número.
- Propriedade do Expoente Negativo: Um número elevado a um expoente negativo é igual ao inverso do número elevado ao expoente positivo correspondente. Em outras palavras, $a^{(-n)} = 1/(a^n)$, onde a é qualquer número diferente de zero.

7. Exponenciação e suas Propriedades – ok1

A operação de exponenciação nos permite encontrar o número que resulta da elevação de uma base dada a um determinado expoente. É a mesma operação de potenciação, com o detalhe de que o número multiplicado por si mesmo várias vezes é chamado de base.

Propriedades da exponenciação:

- Produto de potências com a mesma base: Quando você multiplica duas potências com a mesma base, você soma os expoentes. Em outras palavras, a^m * a^n = a^(m+n).
- Quociente de potências com a mesma base: Quando você divide duas potências com a mesma base, você subtrai os expoentes. Ou seja, a^m / a^n = a^(m-n), desde que a ≠ 0.
- Potência de uma potência: Quando você eleva uma potência a outra potência, você multiplica os expoentes. Em termos matemáticos, (a^m)^n = a^(m*n).
- Potência de um produto: Para elevar um produto à uma potência, você pode elevar cada fator do produto à potência dada. Isso pode ser representado como (ab)^n = a^n * b^n.
- Potência de um quociente: Para elevar um quociente à uma potência, você pode elevar o numerador e o denominador do quociente à potência dada. Em termos matemáticos, (a/b)^n = (a^n)/(b^n), desde que b ≠ 0.
- Potência de zero: Qualquer número elevado a zero é igual a 1, exceto quando a base é zero.
- Potência de um: Qualquer número elevado a um é igual a ele mesmo, ou seja, a^1 = a.

Denominações dos termos de uma exponenciação:

Os termos da exponenciação também têm nomes específicos:

Base: A base é o número que está sendo elevado a uma potência. Na expressão matemática "a^b", "a" é a base.

Expoente: O expoente é o número que indica quantas vezes a base está sendo multiplicada por ela mesma. No mesmo exemplo, "b" é o expoente.

Juntos, a base e o expoente formam uma potência. O resultado da operação de exponenciação é chamado de potência. Por exemplo, em "a^b", o resultado é a potência de "a" elevada a "b".

8. Radiciação e suas Propriedades – ok1

A radiciação é a operação inversa da potenciação. Ela encontra o número que, quando elevado a um certo expoente, resulta no número dado. Por exemplo, √9 = 3, pois 3 elevado ao quadrado é igual a 9.

Propriedades da radiciação:

- Propriedade da Raiz n-ésima de um Produto: A raiz n-ésima do produto de dois números é igual ao produto das raízes n-ésimas dos dois números individualmente. Em outras palavras, (a.b)^(1/n) = (a)^(1/n)x(b)^(1/n), onde a e b são números reais não negativos.
- Propriedade da Raiz n-ésima de um Quociente: A raiz n-ésima do quociente de dois números é igual ao quociente das raízes n-ésimas dos dois números individualmente. Em outras palavras, (a/b)^(1/n) = (a)^(1/n)x(b)^(1/n), desde que b |= 0,
- Propriedade da Raiz n-ésima de uma Potência: A raiz n-ésima de um número elevado a uma potência é igual ao número elevado à potência dividida por n. Em outras palavras, a é um número natural diferente de zero.
- Propriedade da Raiz n-ésima de um Produto de Potências: A raiz n-ésima de um produto de potências é igual ao produto das raízes n-ésimas de cada potência individualmente. Em outras palavras, onde x e y são números reais positivos, m e n são números reais e a é um número natural diferente de zero.

Denominações dos termos de uma radiciação:

Os termos da radiciação também possuem nomes específicos:

Radicando: O radicando é o número ou expressão sob o símbolo de raiz. Na expressão matemática "√a", "a" é o radicando.

Índice: O índice é o número localizado no canto superior esquerdo do símbolo de raiz, indicando qual é o tipo de raiz sendo calculada. Em radicais usuais, como a raiz quadrada, o índice é implícito e igual a 2. Na raiz cúbica, o índice é 3. Para expressões gerais, o índice é indicado explicitamente. Por exemplo, na expressão "∛b", o índice é 3.

9. Logaritmação e suas Propriedades – ok1

A operação de logaritmação nos permite encontrar o expoente ao qual uma base específica deve ser elevada para produzir um determinado número. Então, logaritmo de um número, em uma determinada base, é o expoente ao qual a base deve ser elevada para resultar gerar esse número. Em outras palavras, é a operação inversa da exponenciação.

Formalmente, a logaritmação é definida da seguinte forma:

Dado um número real positivo x (chamado de "argumento") e uma base b também um número real positivo diferente de 1, o logaritmo de x na base b, denotado como log b(x) = y, é o expoente y ao qual a base deve ser elevada para obter x.

Matematicamente, isso pode ser expresso como:

log b(x) =y, se, e soment se, by = x

Por exemplo, log 10(100)

Propriedades da logaritmação:

- Propriedade do logaritmo de uma potência: log_b(a^m) = m * log_b(a). Isso significa que o logaritmo de uma potência pode ser expresso como o expoente multiplicado pelo logaritmo da base.
- Propriedade do logaritmo de um produto: log_b(a * c) = log_b(a) + log_b(c). Isso implica que o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores individuais.
- Propriedade do logaritmo de um quociente: log_b(a / c) = log_b(a) - log_b(c). Aqui, o logaritmo de um quociente é igual à diferença dos logaritmos dos termos individuais.
- Propriedade do logaritmo de uma base elevada a um logaritmo: log_b(b^x) = x. Esta propriedade indica que o logaritmo de uma base elevada a um logaritmo é igual ao próprio logaritmo.
- Propriedade do logaritmo de um logaritmo de uma base elevada: log_b(log_b(a)) = 1. Esta propriedade implica que o logaritmo de um logaritmo é igual a 1.
- Propriedade do logaritmo de um: log_b(1) = 0. O logaritmo de um é sempre zero.

- Propriedade do logaritmo do produto de várias potências com a mesma base: log_b(a^m * c^n) = m * log_b(a) + n * log_b(c). Nesta propriedade, o logaritmo do produto de várias potências é igual à soma dos produtos dos logaritmos dos termos individuais.

Denominações dos termos de uma logaritmação:

Os termos da logaritmação também têm nomes específicos:

Base: A base é o número para o qual estamos calculando o logaritmo. Em uma expressão logarítmica como "log_b(x)", "b" é a base.

Argumento: O argumento é o valor para o qual estamos calculando o logaritmo. No exemplo anterior, "x" é o argumento.

Juntos, a base e o argumento formam uma expressão logarítmica. O resultado da operação de logaritmação é chamado de logaritmo. Por exemplo, em "log_b(x)", o resultado é o logaritmo de "x" na base "b".