IM006 – Expressões Aritméticas, Números Primos, MMC e MDC

1. Introdução

Expressões aritméticas são combinações de números, operadores e, às vezes, delimitadores (parênteses, colchetes e chaves) que representam um cálculo matemático. Elas são usadas frequentemente para realizar operações como adição, subtração, multiplicação e divisão. No entanto elas podem conter exponenciação.

2. Componentes de uma Expressão Aritmética

- Números: Valores constantes que podem ser inteiros, fracionários ou decimais;
- Operadores: Símbolos que indicam a operação a ser realizada:
  - '**+**' para adição;
  - '**-**' para subtração;
  - '**x**' ou '**.**' ou '*****' (em programação, planilhas excel)` para multiplicação e
  - `**/**` para divisão
  -
- Delimitadores: utilizados para definir a ordem das operações, garantindo que certas partes da expressão sejam avaliadas antes de outras:
  - parênteses (),
  - colchetes [] e
  - chaves {}, utilizados para definir a ordem das operações, garantindo que certas partes da expressão sejam avaliadas antes de outras.

3. Ordem das Operações

A avaliação das expressões aritméticas segue uma ordem específica, conhecida pela sigla:

1. <u>Parênteses</u>

2. <u>Colchtes</u>

3. <u>Chaves</u>

4. <u>Exponentes</u> (não mencionados acima, mas presentes em expressões mais complexas)

5. <u>Multiplicação e Divisão</u> (da esquerda para a direita)

6. <u>Adição e Subtração</u> (da esquerda para a direita)

4. Exemplos com Ordem de Operações

- 3 + 4 * 2: Primeiro a multiplicação, depois a adição, resultando em 3 + 8 = 11.
- (3 + 4) * 2: Primeiro a operação dentro dos parênteses, depois a multiplicação, resultando em 7 * 2 = 14.
- {2 + [3 + (4 - 2) + 3*5] + 3*7} + 10 = {2 + [3 + 2 + 3*5] + 3*7} + 10 = {2 + [20] + 21} + 10 = {43} + 10 = 53

5. Definição de números primos e suas propriedades – ok1

O que são os números Primos?

Números primos são números naturais maiores que 1 que têm exatamente dois divisores positivos distintos: 1 e o próprio número. Eles desempenham um papel fundamental na teoria dos números e na criptografia.

O conjunto dos números primos é um sub-conjunto dos números naturais e, exceto o número 2, que é par e primo, por ser divisível por 1 e por ele mesmo, todos os demais números primos são ímpares.

Alguns números primos:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .

Embora a definição de número primo seja clara, no trecho da sequência mostrada acima, e em qualquer outro trecho, não fica evidente a maneira como os seus termos se relacionam. Os termos vão sendo definidos a partir de testes realizados com os números ímpares candidatos, para verificar se são divisíveis apenas por eles mesmos e pela unidade. Dessa forma não há como determinar o próximo número primo da sequência, a partir de operações aritméticas simples feitas com o número primo atual. Isso porque, a maneira como um determinado elemento se relaciona com o anterior e com o próximo da sequência, não apresenta uma regularidade. Por exemplo, o quinto termo que é o 7, que é o anterior, 5, mais dois (7=5+2) e é, também, o próximo, 11, menos 4 (7=11-4). O termo 17 é o anterior mais 4 (17=13+4) e é próximo menos 2 (17=19-2). E diferentemente dos números naturais, não é possível determinar de forma simples, qual é o termo da sequência associado uma posição qualquer.

Posição	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	. . .	nº	. . .
Elemento	**1**	**2**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**. . .**	**?**	**. . .**

Tabela:

Qualquer número natural, não primo, e diferente de 0, pode ser decomposto, ou fatorado, em um produto de fatores primos (**Teorema fundamental da Aritmética**).

6. Características dos Números Primos

- Divisibilidade: Um número primo só pode ser dividido por 1 e por ele mesmo sem deixar resto.
- Infinidade: Existem infinitos números primos. Essa foi uma das primeiras descobertas na teoria dos números, provada por Euclides por volta de 300 a.C.
- Distribuição Irregular: Embora não haja uma fórmula simples para gerar números primos, eles se tornam menos frequentes à medida que os números aumentam. No entanto, eles aparecem ao longo de toda a sequência de números naturais.

7. Teste de Primalidade

Para determinar se um número n é primo:

1. Verifique se n é divisível por algum número primo menor ou igual a $\sqrt{n}$.
2. Se não for divisível por nenhum desses números, então n é primo.

8. Importância dos Números Primos

- Criptografia: Muitos sistemas de criptografia, como RSA, baseiam-se na dificuldade de fatorar grandes números em seus fatores primos.
- Teoria dos Números: Os números primos são fundamentais para vários teoremas e conjecturas matemáticas, como o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que qualquer número inteiro maior que 1 pode ser representado de maneira única como um produto de números primos.

9. Conjecturas e Teoremas Relacionados

- Conjectura de Goldbach: Todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos.
- Teorema dos Números Primos: Descreve a distribuição dos números primos entre os números naturais e fornece uma aproximação de quantos números primos existem até um dado número n.

10. Múltiplos e divisores – ok1

O que é fatorar um número?

Fatorar um número é decompô-lo em um produto de fatores primos. Para isso, divide-se o número entre seus divisores primos tantas vezes quantas forem necessárias, até obter como quociente a unidade. Começa-se dividindo por 2, depois por 3, por 5, por 7, por 11, e assim por diante.

Exemplo: Fatorar o número **13860**

Número n	**Passos**	**Fatores Primos usados na coluna Passos**
n = 13860	**Passo 1**: dá para dividir **n** por **2**	**2**
na = 6930	**Passo 2**: dá para dividir **na** por **2**	**2**
nb = 3465	**Passo 3**: não dá para dividir **nb** por 2, mas dá para dividir por **3**	**3**
nc = 1155	**Passo 4**: dá para dividir **nc** por **3**	**3**
nd = 385	**Passo 5**: não dá para dividir **nd** por 3, mas dá para dividir por **5**	**5**
ne = 77	**Passo 6**: não dá para dividir **ne** por 5, mas dá para dividir por **7**	**7**
nf = 11	**Passo 7**: não dá para dividir **nf** por 7, mas dá para dividir por **11**	**11**
1	**Parar**	-

Tabela:

Então, o número **13860**, pode ser obtido pela multiplicação dos fatores primos **2**x**2**x**3**x**3**x**5**x**7**x**11**

11. Múltiplo de um Número

O que é um múltiplo de um número inteiro?

Pensando em inteiros positivos e diferentes de zero, o múltiplo de um número inteiro é obtido quando multiplicamos o número por um multiplicador ***m***, também inteiro. Assim sendo, quando o número inteiro ***n*** é multiplicado pelo multiplicador ***m***, obtemos o múltiplo ***n.m***. Por exemplo, quando multiplicamos o número 2 pelo multiplicador 2, obtemos o 4 que é múltiplo de 2. Quando multiplicamos o número 2 pelo multiplicador 3, obtemos o 6, que, também, é múltiplo de 2, e assim por diante.

A tabela abaixo dá alguns exemplos de **números**, **multiplicadores** e **múltiplos**.

Número / Multiplicador	**1**	**2**	**3**	. . .	***n***
1	múltiplo = **1**	múltiplo = **2**	múltiplo = **3**	. . .	múltiplo = ***n***
2	múltiplo = **2**	múltiplo = **4**	múltiplo = **6**	. . .	múltiplo = **2.*n***
3	múltiplo = **3**	múltiplo = **6**	múltiplo = **9**	. . .	múltiplo = **3.*n***
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m	múltiplo = ***m***	múltiplo = **2.*m***	múltiplo = **3.*m***	. . .	múltiplo = ***n.m***

Tabela:

12. Definição de Mínimo Múltiplo Comum - MMC

(Colocar exemplos numéricos de MMC!!)

O que é um Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre dois ou mais números?
É o menor número inteiro positivo que é múltiplo de um ou mais números.

Como é calculado o **Mínimo Múltiplo Comum**, dos números ***n1*** e ***n2***?
Antes de pensar no **Mínimo Múltiplo Comum**, vamos pensar, antes, apenas em múltiplos de ***n1*** e ***n2***.
Como foi visto anteriormente, para obter o múltiplo de um número ***n***, é necessário multiplicá-lo por um multiplicador ***m***:
Múltiplo de ***n = n.m***.
Considerando os números ***n1*** e ***n2***, temos:
Múltiplo de ***n1 = n1.m1***.
Múltiplo de ***n2 = n2.m2***.
Agora, se considerarmos um múltiplo comum para ***n1*** e ***n2***, temos:
Múltiplo de ***n1 = n1.m1*** **=** Múltiplo de ***n2 = n2.m2***. (eq. x.1))
Então, se encontrarmos os menores fatores ***m1*** e ***m2*** , que satisfazem a igualdade (eq. x.y) acima, teremos encontrado o **Mínimo Múltiplo Comum** (***= n1.m1 = n2.m2***) dos números ***n1*** e ***n2***.
MMC(***n1***,***n2***) ***= n1.m1 = n2.m2***

13. Método 1 para Calcular o Mínimo Múltiplo Comum de Dois Números *n1* e *n2*

Vamos então executar os seguintes passos:

Passo 1: Fatorar os números ***n1*** e ***n2***.

Passo 2: Multiplicar os números ***n1*** e ***n2***, pelos fatores ***m1*** e ***m2***., respectivamente e

Passo 3: Fazer a igualdade (***n1_fatorado***). ***m1*** = ***(n2_fatorado). m2***

Passo 4: Calcular os valores de ***m1*** e ***m2*** e

Passo 5: Calcular o **Mínimo Múltiplo Comum** de ***n1*** e ***n2***.

Como exemplo, vamos considerar os números **13860** e **5005**.

Fatoração do número **13860**

Número	Passos	Fatores Primos usados na coluna Passos
13860	**Passo 1**: dá para dividir por **2**	**2**
6930	**Passo 2**: dá para dividir por **2**	**2**
3465	**Passo 3**: não dá para dividir por 2, mas dá para dividir por **3**	**3**
1155	**Passo 4**: dá para dividir por **3**	**3**
385	**Passo 5**: não dá para dividir por 3, mas dá para dividir por **5**	**5**
77	**Passo 6**: não dá para dividir por 5, mas dá para dividir por **7**	**7**
11	**Passo 7**: não dá para dividir por 7, mas dá para dividir por **11**	**11**
1	**Parar**	**-**

Tabela:

Então, **13860** = **2x2**x**3**x**3**x**5**x**7**x**11**

Fatoração do número **5005**

Número	Passos	Fatores Primos usados na coluna Passos
5005	**Passo 1**: não dá para dividir por 2 nem por 3, mas dá por **5**	**5**
1001	**Passo 2**: não dá para dividir por **5,** mas dá por **7**	**7**
143	**Passo 3**: não dá para dividir por 7, mas dá por **11**	**11**
13	**Passo 4**: não dá para dividir por 11, mas dá por **13**	**13**
1	**Parar**	**-**

Tabela:

Então, **5005** = **5**x**7**x**11**x**13**

Agora, vamos multiplicar ***n1*** por ***m1*** e ***n2*** por ***m2*** e igualar as duas multiplicações:

n1.m1 = n2.m2 , (eq. x.2)

Substituindo ***n1*** por ***13860*** e ***n2*** por ***5005***, na (eq. x.2) temos:

13860.*m1* = *5005.m2* . (eq. x.3)

Substituindo **13860** por **2**x**2**x**3**x**3**x**5**x**7**x**11 e 5005** por **5**x**7**x**11**x**13**, na (eq. x.3), temos:

2x**2**x**3**x**3**x**5**x**7**x**11.*m1* = 5**x**7**x**11**x**13.*m2*** . (eq. x.4)

Simplificando a (eq. x.4), temos:

2x**2**x**3**x**3**x~~**5**x**7**x**11**~~**.*m1* =** ~~**5**x**7**x**11**~~x**13.*m2*** .

2x**2**x**3**x**3**.***m1* = 13.*m2*** . → **36.*m1* = 13.*m2*** → **36/13 = *m2 / m1*** (eq. x.5)

Para que a eq. x.5, seja satifeita com os valores de ***m1*** e ***m2*** inteiros e menores possível, temos que:

m1 = **13** e ***m2*** = **36**

Então o **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** de ***n1*= 13860** e ***n2= 5005*** é:

MMC(**13860**, **5005**) = **13860.*m1*** = **5005.*m2*** **= 13860x13** = **5005x36** = **180180**

14. Método 2 (mais simples e mais usado) para Calcular o MMC:

Este método consiste em fazer uma fatoração conjunta dos dois números, ***n1***= **13860 e *n2*=5005**

Fatoração de n1	*Fatoração de n2*	Passos	Fatores Primos de *n1*	Fatores Primos de *n2*	Fatores Primos de *n1* e *n2*
***n1* =13860**	***n2* =5005**	**Passo** 1: dá para dividir ***n1*** por **2**	**2**	-	**2**
***n1a* =**6930	***n2* =5005**	**Passo** 2: dá para dividir ***n1a*** por **2**	**2**	-	**2**
***n1b* =**3465	***n2* =5005**	**Passo** 3: dá para dividir ***n1b*** por **3**	**3**	-	**3**
***n1c* =**1155	***n2* =5005**	**Passo** 4: dá para dividir ***n1c*** por **3**	**3**	-	**3**
***n1d* =**385	***n2* =5005**	**Passo** 5: dá para dividir ***n1d*** e ***n2*** por **5**	**5**	**5**	**5**
***n1e* =**77	***n2b* =**1001	**Passo** 6: dá para dividir ***n1e*** e ***n2b*** por **7**	**7**	**7**	**7**
***n1f* =**11	***n2c* =**143	**Passo** 7: dá para dividir ***n1f*** e ***n2c*** por **11**	**11**	**11**	**11**
1	***n2c* =** 13	**Passo** 8: dá para dividir ***n2c*** por **13**	-	**13**	**13**
1	1	**Parar**	-	**-**	-

Tabela:

Fazendo o produto dos fatores primos de ***n1*** e ***n2*** (coluna mias à direita):
2x2x3x3x5x7x11x13 = 180180 que é o mesmo resultado obtido com Método 1

MMC(*n1*, *n2*) =MMC(13860, 5005) = 180180

O que se faz normalmente é uma tabela com 3 ou mais colunas, dependendo de quantos números queremos encontrar o MMC:

n1	***n2***	**Fatores primos de *n1* e *n2***
13860	**5005**	**2**
6930	-	**2**
3465	-	**3**
1155	-	**3**
385	1001	**5**
77	143	**7**
11	13	**11**
1	13	**13**
1	1	**-**

Tabela x1

15. Análise do Método 2 para Calcular o MMC

Olhando os fatores primos que compõem **MMC= 180180**, tabela x1, temos:

2x**2**x**3**x**3**x**5**x**7**x**11**x**13 = 180180**

Vamos colocar esses fatores primos em tabelas e identificar os valores ***n1***, ***m1*** , ***n2*** e ***m2*** mostrados no **Método 1**.

Os fatores da linha abaixo compõem o **MMC = 180180**							
2	**2**	**3**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**

Tabela:

Os fatores da linha logo abaixo compõem o número ***n1*= 13860**							O fator da linha logo abaixo é o multiplicador ***m1* = 13**, calculado no **Método 1**
2	**2**	**3**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**

Tabela:

Os fatores da linha logo abaixo compõem o ***m2* = 36**, calculado no **Método 1**.				Os fatores da linha logo abaixo abaixo compõem o número ***n2*= 5005**			
2	**2**	**3**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**

Tabela:

16. Divisor de um Número

O divisor de um número natural ***n*** é outro número natural ***d*** menor ou igual a ***n***, que faz com que a divisão ***n/d*** = ***q*** (quociente) dê como resultado (quociente) um número inteiro.

(Colocar exemplos numéricos de divisores)

A tabela abaixo dá alguns exemplos de **números**, **quocientes** e **divisores**.

Num. / Quoc.	**10**	**20**	**30**	. . .	***36.n* *(n Inteiro)***
2	divisor = **5**	divisor = **10**	divisor = **15**	. . .	divisor = **18.n**
3	Não Existe	Não Existe	divisor = **10**	. . .	divisor = **12.n**
4	Não Existe	divisor = **5**	Não Existe	. . .	divisor = **9.n**
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
q	Para existir, depende de ***q***	Para existir, depende de ***q***	Para existir, depende de ***q***	. . .	Para existir, depende de ***q***

Tabela:

17. Definição de Máximo Divisor Comum - MDC

O que é um Máximo Divisor Comum (**MDC**) entre dois ou mais números?
É o maior número inteiro positivo que é divisor de um ou mais números.

(Colocar exemplos numéricos de MDC!!)
(Ver se a definição restringe os números que podem ter MDC!!)

Exemplos:

O número **4** é o Máximo Divisor Comum entre **12**, **8** e **4**.							
12	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**12**	**13**
8	**1**	**2**	**4**	**8**	**-**	**-**	**-**
4	**1**	**2**	**4**	**-**	**-**	**-**	**-**

Tabela:

18. Método 1 para Calcular o Máximo Divisor Comum de Dois Números *n1* e *n2*

Como é calculado o **Máximo Divisor Comum**, dos números ***n1*** e ***n2***?
Antes de pensar no **Máximo Divisor Comum**, vamos pensar, antes, apenas em divisores de ***n1*** e ***n2***.
Como foi visto anteriormente, para obter o divisor de um número ***n***, é necessário dividí-lo por um divisor or ***d***:
Divisor de ***n = n/q***.
Considerando os números ***n1*** e ***n2***, temos:
Divisor de ***n1 = d1 = n1/q1***.
Divisor de ***n2 = d2 = n2/q2***.
Agora, se considerarmos um divisor comum para ***n1*** e ***n2***, temos:
d1 = n1/q1 = d2 = n2/q2. (eq. x.14))
Então, se encontrarmos os menores quocientes ***q1*** e ***q2*** , que satisfazem a igualdade (eq. x.14) acima, teremos encontrado o **Maior Divisor Comum** (***= n1/q1 = n2/q2***) dos números ***n1*** e ***n2***.
MDC(***n1***,***n2***) ***= n1/q1 = n2/q2***

n1 = 48 = **2x2x2x2x3**
n2 = 36 = **2x2x3x3**

2x2x2x2x3*/q1 =* 2x2x3x3*/q2*
***q1/q2 =* (2x2x2x2x3)/(2x2x3x3)**
***q1/q2 =* (2x2)/(3)**
q1 = **2x2 = 4**
q2 = **3**
MDC(***n1***,***n2***) = ***d1 = n1/q1*** = 48/4 = **12** = ***d2 = n2/q2*** = 36/3 = **12**

19. Método 2 para Calcular o Máximo Divisor Comum de Dois Números *n1* e *n2*

Este método consiste em fazer uma fatoração conjunto dos dois números ***n1*** e ***n2***.

Vamos considerar os números ***n1***= **48 e *n2*=36**

Fatoração de n1	*Fatoração de n2*	Passos	Fatores Primos de *n1*	Fatores Primos de *n2*	Fatores Primos Comuns de *n1* e *n2*
n1 **=48**	***n2*** **=36**	**Passo** 1: dá para dividir ***n1*** e ***n2*** por **2**	**2**	**2**	**2**
n1a **=**24	***n2a*** **=18**	**Passo** 2: dá para dividir ***n1a*** e ***n2a*** por **2**	**2**	**2**	**2**
n1b **=**12	***n2b*** **=9**	**Passo** 3: dá para dividir ***n1b*** por **2**	**2**	-	**-**
n1c **=**6	***n2b*** **=9**	**Passo** 4: dá para dividir ***n1c*** por **2**	**2**	-	**-**
n1d **=**3	***n2b*** **=9**	**Passo** 5: dá para dividir ***n1d*** e ***n2b*** por **3**	**3**	**3**	**3**
n1e **=**1	***n2c*** **=**3	**Passo** 6: dá para dividir ***n1e*** e ***n2c*** por **3**	**-**	**3**	**-**
n1f **=**1	***n2*d=**1	**Parar**	**-**	**-**	**-**

Tabela:

Olhando a quarta e quinta coluna da tabela acima, os fatores primos comuns que compõem os números ***n1*** e ***n2*** são 2, 2 e 3. Então, o **MDC(36,48)** vale **2x2x3** = **12**.

20. Relação Entre o MMC e MDC – ok1

Mínimo Múltiplo Comum – MMC e Relação entre Máximo Divisor Comum - MDC

Vamos pegar o exemplo anterior ***n1* = 48 e *n2* =36**

Fatoração de n1	*Fatoração de n2*	Passos	Fatores Primos de *n1*	Fatores Primos de *n2*	Fatores Primos de *n1* e *n2* *(União)*	Fatores Primos Comuns de *n1* e *n2* *(Intersecção)*
***n1* =48**	***n2* =36**	**Passo** 1: dá para dividir ***n1*** e ***n2*** por **2**	**2**	**2**	**2**	**2**
***n1a* =**24	***n2a* =18**	**Passo** 2: dá para dividir ***n1a*** e ***n2a*** por **2**	**2**	**2**	**2**	**2**
***n1b* =**12	***n2b* =9**	**Passo** 3: dá para dividir ***n1b*** por **2**	**2**	-	**2**	**-**
***n1c* =**6	***n2b* =9**	**Passo** 4: dá para dividir ***n1c*** por **2**	**2**	-	**2**	**-**
***n1d* =**3	***n2b* =9**	**Passo** 5: dá para dividir ***n1d*** e ***n2b*** por **3**	**3**	**3**	**3**	**3**
***n1e* =**1	***n2c* =**3	**Passo** 6: dá para dividir ***n1e*** e ***n2c*** por **3**	**-**	**3**	**3**	**-**
***n1f* =**1	***n2*d= 1**	**Parar**	**-**	**-**	**-**	**-**

Tabela:

***n1* = 2x2x2x2x3**
***n2* = 2x2x3x3**
MMC(n1,n2)* = *2x2x2x2x3x3
***MDC(n1, n2)* = 2x2x3**

n1.n2 = (**2x2x2x2x3**).(**2x2x3x3**) = **2x2x2x2x2x2x3x3x3**

MMC(n1,n2). MDC(n1, n2) = (***2x2x2x2x3x3***).(**2x2x3**) = **2x2x2x2x2x2x3x3x3**

n1.n2 = MMC(n1,n2). MDC(n1, n2)