IM012 - Polinômios

1. Introdução

Os polinômios são expressões algébricas que envolvem variáveis elevadas a potências inteiras não negativas, multiplicadas por coeficientes constantes. Essas expressões são fundamentais na álgebra e têm diversas aplicações em matemática e ciências aplicadas.
Seguem alguns pontos importantes sobre polinômios:

- **Definição**: Um polinômio é uma expressão matemática da forma:
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + . . . a_1 x + a_0$
  onde x é a variável, e a_n, a_{n-1}, . . . ,a_1 ,a_0 são coeficientes constantes, e n é um número inteiro não negativo chamado grau do polinômio.

- **Termos**: Cada parte da expressão separada por sinais de adição é chamada de termo. Cada termo contém um coeficiente multiplicando a variável elevada a uma potência.

- **Grau do Polinômio**: O grau é o maior expoente ao qual a variável é elevada. O termo de maior grau determina o grau do polinômio.

- **Monômio, Binômio, Trinômio**: Polinômios podem ser classificados pelo número de termos. Um monômio tem um termo, um binômio tem dois, e um trinômio tem três.

- **Operações com Polinômios**: Adição e subtração de polinômios envolvem combinar termos semelhantes. A multiplicação de polinômios é realizada distribuindo cada termo do primeiro polinômio sobre todos os termos do segundo e somando os resultados.

- **Raízes ou Zeros**: As raízes de um polinômio são os valores de x que tornam o polinômio igual a zero. Encontrar as raízes é essencial para resolver equações polinomiais.

- **Teorema do Resto e Teorema do Fator**: O Teorema do Resto estabelece que, ao dividir um polinômio por um binômio do tipo $x - c$, o resto é igual ao valor do polinômio quando $x = c$. O Teorema do Fator relaciona as raízes de um polinômio com seus fatores.

- **Identidades Notáveis**: Algumas expressões polinomiais apresentam formas especiais, como as identidades notáveis, que incluem o quadrado da soma, o quadrado da diferença, e a diferença de quadrados.

- **Divisão de Polinômios**: Similar à divisão numérica, a divisão de polinômios envolve encontrar um quociente e um resto ao dividir um polinômio por outro.

2. Definição de polinômios com coeficientes Reais

<u>Definição</u>: Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo: $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde $n \in IN$, $a_i, i = 0,1,\ldots,n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i, i = 1,\ldots,n$, termos do polinômio. Cada termo é denominado monômio.

Exemplos:

$P(x)=5x^4+3x^3-2x+1$; $P(x)=-8x+\pi$; $P(x)=x^5+\sqrt{3}x^2+2$

Contra-exemplos (expressões que não representam polinômios):

$f(x)=x-3x^{\frac{1}{2}}+5$; $f(x)=x^{-4}+2x+1$

3. Definição de Polinômios com Coeficientes Complexos

Definição — Função Polinomial. Uma função polinomial $p(x)$ é uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de somas finitas das potências inteiras e não negativas da variável x, ou seja:

$$p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + a_{(n-2)} x^{(n-2)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Com n um número inteiro não negativo, $(a_n, a_{(n-1)}, \ldots, a_2, a_1, a_0) \in C$ e $x \in C$.

Os números $a_n, a_{(n-1)}, a_{(n-2)}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são ditos coeficientes da função polinomial $p(x)$.

- **Exemplo 1** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = -x^2 + 3x - 1$ é uma função polinomial com coeficientes $a_2 = -1$, $a_1 = 3$ e $a_0 = -1$.
- **Exemplo 2** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(x) = 2x^6 - 7ix^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1 + i$ é uma função polinomial com coeficientes $a_6 = 2$, $a_5 = 0$, $a_4 = -7i$, $a_3 = -4$, $a_2 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_0 = 1 + i$.

Observação Observe que os coeficientes do exemplo 1 são todos reais, assim dizemos que a função p, do exemplo 1, é uma função com coeficientes reais

Observação Observe que os coeficientes do exemplo 2 são todos complexos, assim dizemos que a função p, do exemplo 2, é uma função com coeficientes complexos

4. Valor Numérico de um Polinômio

Seja P(x) um polinômio.

Considere x=α (α∈ IR) um valor fixo atribuído a x.

Calcule $P(\alpha)=a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

P(α) é o valor numérico do polinômio para x=α.

OBS:

1. O valor numérico do polinômio P para x=0 é:
   $P(0)=a_n 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \ldots a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$.
   Isto é, P(0) é igual ao termo independente de x.
2. O valor numérico do polinômio P para x=1 é:
   $P(1)= a_n 1^n + a_{n-1}1^{n-1} + \ldots a_2 1^2 + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0$.
   Assim, $P(1)=\sum_{k=0}^{n} a_k$, isto é, P(1) é igual a soma dos coeficientes do polinômio.
3. Quando P(α)=0, dizemos que α é raiz do polinômio P(x).

5. Classificação de Polinômios (por grau)

O grau de um polinômio P(x), não nulo, é o maior expoente da variável x, com coeficiente não nulo, que aparece na expressão que define P(x).

Exemplo:

$P(x)=5x^4-x^6$ → gr(P)=6

$P(x)= 3x^2-5x+1$ → gr(P)=2

$P(x)=5$ → gr(P)=0

OBS: Não se define o grau de polinômio nulo.

6. Igualdade de Polinômios

Dois polinômios P(x) e Q(x) são iguais, P(x)=Q(x), quando todos os seus coeficientes são ordenadamente iguais.

Sejam P(x)= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2x^2 + a_1x + a_0$ e Q(x)= $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots b_2x^2 + b_1x + b_0$

$$P(x)=Q(x) \leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ a_0 = b_0 \end{cases} \quad \text{Coeficientes de mesmo grau são iguais}$$

7. Adição e Subtração de Polinômios

A adição e subtração de polinômios é feita a partir da adição e subtração dos coeficientes correspondentes a um mesmo grau.

$P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

$P(x)-Q(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\ldots(a_2-b_2)x^2+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)$

Exemplo:

$P(x)=3x^3-2x^2+2$ e $Q(x)=3x^4-7x^3+x+1$

$P(x)+Q(x)=(0+3)x^4+(3-7)x^3+(-2+0)x^2+(0+1)x+(2+1)=3x^4-4x^3-2x^2+x+3$

$P(x)-Q(x)=(0-3)x^4+(3-(-7))x^3+(-2-0)x^2+(0-1)x+(2-1)=-3x^4+10x^3-2x^2-x+1$

Observação a) Em geral, o grau do polinomio $f(x)+g(x)$ é, no máximo, igual ao maior grau entre os graus de $f(x)$ e de $g(x)$ e, no mínimo, grau zero. Ou seja:

$$0 \leq gr(f+g) \leq \max\{gr(f), gr(g)\}$$

b) O grau de $f(x) * g(x)$ é dado pela soma do grau de $f(x)$ com o grau de $g(x)$. Ou seja:

$$gr(f.g) = gr(f) + gr(g)$$

8. Multiplicação de Polinômios

A multiplicação é feita pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicação.

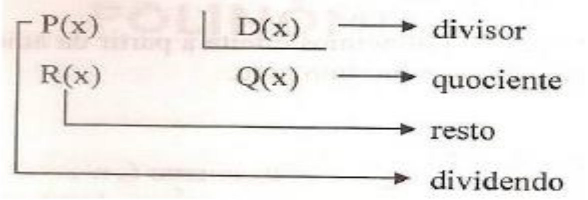
OBS: Se o grau do polinômio P é n e o grau do polinômio Q é n, então o grau do polinômio P.Q será n+m.

Exemplo: $P(x)=2x-1$ e $Q(x)=5x^2+2x-2$

$P(x).Q(x)=(2x-1)(5x^2+2x-2)$
$P(x).Q(x)=10x^3+4x^2-4x-5x^2-2x+2$
$P(x).Q(x)=10x^3-x^2-6x+2$

9. Divisão de Polinômios – Geral

Dividir um polinômio P(x) por um polinômio D(x), não nulo, é achar um par de polinômios Q(x) e R(x), de tal maneira que:



Ou seja, dividir o polinômio P(x) pelo polinômio D(x) é obter os polinômios Q(x) e R(x) tais que:

$$\boxed{P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

onde $0 \leq G_R < G_D$ ou a divisão é exata e $R(x) = 0$

Quando o resto da divisão de P(x) por D(x) é nulo, dizemos que o polinômio P(x) é divisível por D(x).

10. Divisão de Polinômios – Método da Chave

1. Método da chave

Vamos dividir $2x^3 + 3x - 1$ *por* $x^2 + 2x + 5$

Solução: *Completa-se o dividendo com* $0x^2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +\,0x^2 & +\,3x & -\,1 & x^2 + 2x + 5 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -\,4x^2 & -\,10x & & 2x - 4 \\
\cline{1-4}
 & -\,4x^2 & -\,7x & -\,1 & \\
 & 4x^2 & +\,8x & +\,20 & \\
\cline{1-4}
 & & x & +\,19 &
\end{array}
$$

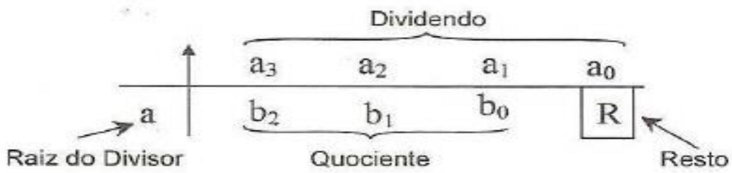
Então: $Q(x) = 2x - 4$

$R(x) = x + 19$

11. Divisão de Polinômios - Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Este dispositivo é utilizado para dividir um polinômio P(x) por um polinômio do 1º grau da forma x-a. Neste método, trabalha-se apenas com os coeficientes do polinômio e com o valor de a.

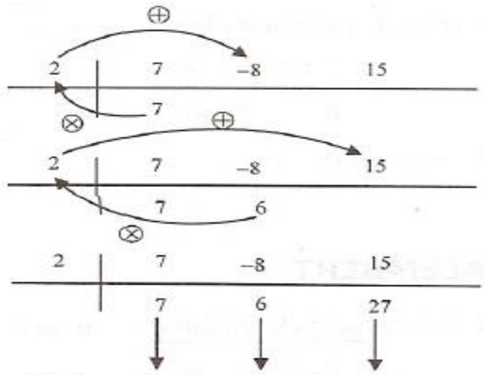
Dispositivo: Seja $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ por $D(x)=x-a$



Exemplo:

$P(x) = 7x^2 - 8x + 15$

Binômio: $x - 2$



$Q(x) = 7x + 6 \quad R = 27$

OBS: Se o resto da divisão é zero, então o polinômio é divisível pelo binômio divisor.

12. Divisão de Polinômios – Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do 1ºgrau do tipo x-a é igual ao valor numérico do polinômio $P(x)$ para $x=a$, ou seja, $P(a)=R$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array}$$

$R = P(a)$, onde a é raíz do binômio $(x - a)$.

Como o divisor é do 1º grau, o resto é nulo ou tem grau zero. De qualquer modo, R é uma constante, isto é, independente de x. Para calcular o valor de R basta substituir na identidade x por a.
Note que a é raiz do binômio.

13. Divisão de Polinômios – Teorema de D`Alembert

Teorema de D´Alembert

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio x-a se, e somente se, P(a)=0.

$$\begin{array}{l|l} P\,(x) & x - a \\ \hline 0 & Q(x) \end{array}$$

$$R = P(a) = 0$$

Note que "a" além de ser raiz do binômio x-a é também raiz do polinômio P(x).

14. Polinômio de Grau 3: como encontrar todas as raízes conhecendo-se uma delas

OBS: Conhecida uma raiz **r** do polinômio P(x), podemos obter as demais raízes de P(x) da seguinte maneira:

- Dividimos P(x) por x-r, usando o algoritmo de Briott-Ruffini. As raízes do quociente Q(x) dessa divisão são as demais raízes de P(x).

<u>Divisão por (x-a)(x-b)</u>

Se um polinômio P(x) é divisível separadamente pelos binômios (x-a) e (x-b), com $a \neq b$, então P(x) é divisível pelo produto (x-a)(x-b). (A recíproca é verdadeira)

Generalizando, se P(x) é divisível por n fatores distintos $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_n)$ então P(x) é divisível pelo produto $(x-a_1).(x-a_2)... (x-a_n)$.

15. Equações Polinomiais

Definição: Se P(x) é um polinômio de grau n>0, chama-se equação algébrica ou polinomial à igualdade P(x)=0. Assim, equação algébrica de grau n é uma equação do tipo:

$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$.

Raiz de uma equação algébrica

Dada uma equação algébrica P(x)=0, o número r é uma raiz dessa equação se, e somente se, P(r)=0.

Conjunto-solução

Conjunto-solução de uma equação algébrica é o conjunto formado por todas as raízes (e somente por elas) da equação. Resolver uma equação é obter seu conjunto solução.

16. Equação do Primeiro Grau

Conjunto-solução de uma equação algébrica é o conjunto formado por todas as raízes (e somente por elas) da equação. Resolver uma equação é obter seu conjunto solução.

17. Equação do Segundo Grau

Uma equação é classificada como equação do 2º grau quando puder ser escrita sob a forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a,b e c são reais, com $a \neq 0$. Uma equação do 2º grau tem no máximo duas raízes, que podem ser obtidas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

OBS:

- Se $\Delta > 0$ então a equação admite duas raízes reais e distintas
- Se $\Delta = 0$ então a equação admite duas raízes reais e iguais.
- Se $\Delta < 0$ então a equação admite duas raízes complexas.

18. Equações do Terceiro e Quarto Graus

Uma equação é classificada como equação do 3º e 4º grau, quando puder ser escrita sob a forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad ou \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

As raízes das equações do terceiro e quarto graus podem ser obtidas através de fórmulas gerais que são extremamente trabalhosas.

OBS: As equações de grau superior a 4 não apresentam fórmulas resolutivas. Desta forma, apresentam-se teoremas válidos para quaisquer equações algébricas que possibilitam a resolução ou, ao menos, informações úteis na obtenção das raízes de uma equação.

19. Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema da Álgebra sobre equações algébricas de coeficientes reais diz:

Toda equação algébrica de grau n admite no conjunto dos números complexos n raízes complexas.

O teorema garante a existência de n raízes complexas, não diz como obtê-las.
O teorema tem validade no conjunto dos números complexos, ou seja, pode ou não ter raiz real.

(**Procurar um texto melhor!!!**)

20. Teorema da Decomposição

Seja P(x)=$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n>0. Demonstra-se que P(x) pode ser decomposto, ou seja, fatorado, na forma seguinte:

$$\boxed{P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)}$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_n$. são as raízes da equação: $P(x) = 0$

OBS: Esta forma fatorada mostra que a equação tem no máximo n raízes distintas, e não exatamente n, pois não sabemos se os números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são todos distintos dois a dois.

21. Multiplicidade de uma raiz

Dizemos que r é uma raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$), da equação $P(x)=0$ se, e somente se, a equação puder ser escrita sob a forma,

$$(x-r)^m \, . \, Q(x)=0$$

Isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x)=0$ quando o polinômio P é divisível por $(x-r)^m$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores iguais a $(x-r)$.

Exemplo: A equação $x^5.(x+8)^3$ admite as raízes $x=0$ (com multiplicidade 5) e $x=-8$ (com multiplicidade 3).

22. Pesquisa de raízes

Quando se conhece uma raiz r de uma equação algébrica P(x)=0, divide-se P(x) por x-r, recaindo-se numa de grau menor.

Exemplo: Se x=-3 é uma raiz da equação $x^3+3x^2+2x+6=0$, determine as outras raízes.

$$\begin{array}{c|cccc}
-3 & 1 & 3 & 2 & 6 \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad 0 \quad 2} & & & 0 \longrightarrow \text{Resto}
\end{array}$$

$$x^2+2=0$$

$$x^2=-2$$

$$x=\pm\sqrt{2}\,i$$

23. Teorema das Raízes Inteiras

Se r é uma raiz inteira de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então r é um divisor de a_o.

OBS: Este teorema permite descobrir se a equação tem ou não raízes inteiras; basta para tanto, verificar um por um os divisores do termo independente de x, a_0.

Se $r = \frac{p}{q}$ (p e q inteiros primos entre si), é uma raiz da equação algébrica com coeficientes inteiros.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, então p é divisor de a_o e q é divisor de a_n.

Observação:

Este teorema abrange o anterior, ou seja, o conjunto das possíveis raízes racionais contém o conjunto das possíveis raízes inteiras.

24. Teorema do Fator

Definição Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Demonstração:

Pelo Teorema do Resto, a divisão de $p(x)$ por $x - c$ resulta num quociente $q(x)$ e um resto $p(c)$ tal que:

$$p(x) = (x - c).q(x) + p(c)$$

Se c é uma raiz de $p(x)$, então $p(c) = 0$ e temos:

$$p(x) = (x - c).q(x)$$

Portanto, $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Como consequencia, podemos dizer que $p(x)$ é divisivel por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $(x - a).(x - b)$.

25. Teorema das Raízes Complexas

Se um número complexo $x = a + bi$ (a, $b \in R$) é raiz de uma equação algébrica com **coeficientes reais**, então o seu conjugado $\overline{x} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Importante:

Este teorema apresenta as conseqüências:

- O número de raízes complexas, não reais, de uma equação algébrica com coeficientes reais é sempre par.
- Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

26. Dica sobre Raízes de Polinômios

Observação — DICA!. Desenhe a função $p(x) = x^3 - 4x$ num gráfico $-3 < x < 3$.

Note que, $p(-1) > 0$ e por isso está acima do eixo x enquanto $p(1) < 0$ está abaixo. Isso quer dizer que existe pelo menos um $-1 < x < 1$ tal que $p(x) = 0$ e veja que, nesse caso, esse x é igual a zero.

Agora, propomos para você tentar encontrar mais uma raiz de $p(x)$ sabendo que $p(1) < 0$ e $p(3) > 0$. (Perceba que, no grafico desenhado, $p(x)$ corta o eixo x em três pontos e que um deles está entre -1 e 1, outro entre 1 e 3 e o ultimo entre -3 e -1).

Em outras palavras no intervalo em que $p(x)$ muda de sinal(do positivo para o negativo ou vice-versa) ele corta o eixo x, isso quer dizer que, nesse intervalo, existe uma raiz a de $p(x)(p(a) = 0)$.

CUIDADO!!!!!

Essa dica não funciona para todo tipo de função, mas no caso dos polinômios ela é válida quando p(x) tem raízes reais.

27. Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são multiplicações entre polinômios, muito conhecidas em virtude de seu uso extenso.

Igualdade	Exemplo
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$
$(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(4x-2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$x^2 - 5 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$	$(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$	$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$	$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$	$x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$
$x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$	$x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$	

28. Fatoração

Fatorar um polinômio significa reescrevê-lo como produto de outros polinômios.

Exemplos:

a) $x^3 - x =$

b) $x^4 - 5x^2 =$

c) $x^4 - 1 =$

d) $x^3 + 8 =$

e) $x^6 - 27 =$

29. Completar Quadrados

O processo de completar quadrados tem base nas fórmulas de produtos notáveis $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, fazendo-se uma comparação direta entre os termos . É uma operação muito utilizada em polinômios de grau 2.

Exemplos: Completar quadrados:

a) x^2+6x

Temos que comparar com $(a+b)^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\quad\quad\quad = x^2 + 6x$

Comparando, diretamente, temos a=x e que 2ab=6x → 2b=6 → b=3. Logo $b^2=9$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Assim: $x^2 + 6x = x^2 + 6x + (9-9) = (x^2 + 6x + 9) - 9 = (x + 3)^2 - 9$

b) $x^2 - x + 2 = (x^2 - x) + 2$

Inicialmente, vamos desconsiderar a constante. Podemos comparar essa expressão com $(a-b)^2$, pois o coeficiente do termo de grau 1 é negativo. Assim:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\quad\quad\quad x^2 - x$

Comparando, diretamente, temos que a=x e que 2ab=x. Daí, 2b=1 → b=1/2. Logo, $b^2=1/4$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

c) Assim, $(x^2 - x) + 2 = (x^2 - x) + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

30. Algumas Curiosidades sobre Polinômios

Você se lembra do número e? Aquele número irracional que estudamos em *função exponencial* e *função logarítmica*?

Em matemática temos que a *função exponencial* pode ser aproximada por um polinômio chamado de polinômio de Taylor, cuja representação é:

$$e^x = p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

Assim observe que temos um polinômio de grau 5 que aproxima uma função a um determinado valor. Por exemplo:

$$e^1 = p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,7166666\ldots$$

Logo concluímos que $e \approx 2,7$ utilizando o polinômio de Taylor.

Existem também os polinômios de Taylor de diversas funções matemáticas. Veja, como exemplo, o polinômio de Taylor de grau 8, que aproxima os valores da função cosseno:

$$\cos(x) = p(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

31. Encontrar Coeficientes de Polinômios

Para encontrar os coeficientes de um polinômio, podemos usar diferentes métodos, dependendo do contexto e das informações disponíveis. A seguir, estão algumas abordagens comuns:

1. Polinômio Definido por Raízes (Fatores Lineares)

Se as raízes (ou zeros) do polinômio forem conhecidas, o polinômio pode ser construído na forma fatorada:

$$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Aqui, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes do polinômio, e a é o coeficiente líder (um valor que pode ser determinado a partir de uma condição adicional, como $P(0)$).

Para encontrar os coeficientes, expandimos a forma fatorada multiplicando os termos.

2. Interpolação Polinomial

Se você tiver um conjunto de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ que o polinômio deve passar, você pode montar um sistema de equações lineares para encontrar os coeficientes. O polinômio terá a forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Substituímos cada par (x_i, y_i) na equação do polinômio para gerar um sistema de equações que pode ser resolvido para $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

3. Derivadas e Condições Iniciais

Se você conhece valores do polinômio e de suas derivadas em um ponto específico, pode usar esses dados para encontrar os coeficientes. Para um polinômio de grau n, precisamos conhecer o valor do polinômio e suas primeiras n derivadas em um ponto específico x_0:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

As condições fornecidas pelo valor do polinômio e suas derivadas em x_0 permitem criar um sistema linear que pode ser resolvido para encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

4. Método de Regressão

Se os coeficientes do polinômio precisam ser ajustados a um conjunto de dados que não segue exatamente uma relação polinomial (por exemplo, em análise de regressão), uma abordagem é minimizar a soma dos quadrados dos erros entre os valores previstos pelo polinômio e os valores observados.

Esse método ajusta os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de modo a melhor representar o conjunto de dados fornecido.

5. Uso de Ferramentas Computacionais

Para cálculos mais complexos, é comum usar bibliotecas de software, como `NumPy` em Python, que fornecem funções para ajustar polinômios a dados, encontrar coeficientes a partir de raízes, ou resolver sistemas de equações lineares.

Cada uma dessas abordagens pode ser usada em diferentes contextos, dependendo das informações disponíveis e do objetivo específico de encontrar os coeficientes do polinômio.

Resumo:

Cada uma dessas abordagens pode ser usada em diferentes contextos, dependendo das informações disponíveis e do objetivo específico de encontrar os coeficientes do polinômio.

32. As relações de Girard

Definição: Chama-se de **equação polinomial** de grau n, $n \in \mathbb{N}$, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser escrita da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Onde a_n, a_{n-1}, ..., a_0 são os coeficientes reais do polinômio p(x), sendo que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Além disso, dizemos que $z \in \mathbb{C}$, é uma **raiz** de p(x) se p(z) = 0.

Muitos estudiosos trabalharam em diversos métodos para resolução desse tipo de equação e um deles foi Albert Girard. A ideia dele foi relacionar os coeficientes (reais ou complexos) e as raízes de uma equação polinomial. Essas relações ficaram conhecidas como **Relações de Girard** e são muito utilizadas até hoje. Vejamos como escrevê-las para polinômios de diversos graus.

- As relações de Girard para polinômios de segundo grau

Polinômios de 2° grau

Sejam $p(x)=ax^2+bx+c$, onde a ≠ 0, x_1 e x_2 raízes de p(x), então as relações de Girard são dadas por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

- As relações de Girard para polinômios de terceiro grau

Polinômios de 3° grau

Considere o polinômio $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, onde a ≠ 0, e sejam x_1, x_2 e x_3 raízes de p(x), então as relações de Girard são dadas por:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$$

- As relações de Girard para polinômios de quarto grau

Polinômios de 4° grau

Seja o polinômio de quarto grau $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, onde a ≠ 0, e sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 raízes desse polinômio. Escrevemos que as relações de Girard de uma equação polinomial de quarto grau são:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_4 + x_1.x_3.x_4 + x_2.x_3.x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a}$$

- As relações de Girard para polinômios de grau **n**

Polinômios de grau n

Se $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio de grau n (n ≥ 1), onde $a_n \neq 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então temos que as relações de Girard podem ser escritas como:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + \cdots + x_1.x_n + x_2.x_3 + x_2.x_4 + \cdots + x_{n-1}.x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_4 + \cdots + x_{n-2}.x_{n-1}.x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$x_1.x_2.x_3. \ldots .x_{n-1}x_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

Ou seja, teremos tantas relações de Girard quanto for o grau do polinômio que compõe a equação polinomial estudada.