# IM015 - Funções

## 1. Introdução

Funções matemáticas são relações entre conjuntos de números, onde a cada elemento do primeiro conjunto (domínio) é associado um único elemento no segundo conjunto (contradomínio). Essa associação é realizada por meio de uma regra específica, chamada de lei de formação.

O estudo das funções é fundamental em matemática, pois elas desempenham um papel crucial em diversas áreas, como álgebra, análise matemática, geometria, física e ciências computacionais. As funções oferecem ferramentas poderosas para modelar fenômenos da realidade e resolver uma variedade de problemas matemáticos e práticos.

As funções são representadas geralmente por f(x), onde "f" é o nome da função e "x" é o elemento do domínio (variável independente). O valor resultante, que pertence ao contradomínio (y, ou f(x) ou variável dependente), é chamado de imagem de "x" pela função.

Existem diversos tipos de funções, incluindo lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras. Cada tipo de função possui propriedades e características próprias. Por exemplo, funções lineares têm uma representação gráfica de uma linha reta, enquanto funções quadráticas geram parábolas.

Como exemplos de funções, podemos mencionar, em um quadrado, as relações entre seu lado (**x**) e:

- o seu perímetro (**P**), **P** = **4x** (função linear) e
- a sua área (**A**), **A** = $\mathbf{x^2}$ (função quadrática).

## 2. Definição de Função

**Definição :** Dados dois conjuntos não vazios $A$ e $B$, uma **função** $f: A \to B$ (Lê-se função $f$ de $A$ em $B$) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$ (Lê-se $f$ de $x$). Denotamos por

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad f: A \to B \text{, tal que } y = f(x)$$

## 3. Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função

Com o uso da notação $f:A \rightarrow B$ tal que $y = f(x)$, podemos destacar alguns elementos importantes de uma função:

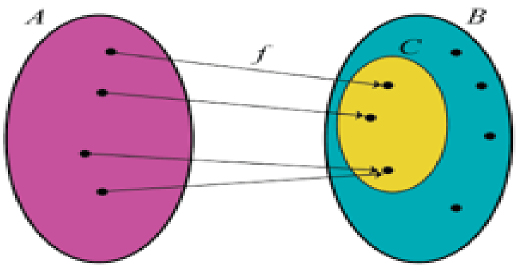
- **Domínio:** é o conjunto ***A*** representado por $D(f)$. O domínio corresponde ao conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$, de forma que $y = f(x)$;
- **Contradomínio:** O conjunto ***B*** é denominado de contradomínio e será denotado por $CD(f)$. É o conjunto onde se encontram os valores possíveis que a função pode atingir. Note que o conjunto ***B*** contém os possíveis valores que a função pode atingir mas não apenas esses valores, ou seja, o contradomínio pode conter valores não atingido pela função;
- **Imagem:** Para cada elemento $x$ de ***A***, o elemento $y = f(x) \in B$ é a imagem de $x$ pela função $f$. Os elementos de ***B*** que são imagens de algum elemento de ***A***, formam um subconjunto de ***B***, chamado ***conjunto imagem*** da função $f$, denotamos por $Im(f)$. Em termos matemáticos, $Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ e } y = f(x)\}$. Segue-se então que $Im(f) \subset CD(f)$.

## 4. Lei de Formação ou de Correspondência e Diagrama de Flechas

- **Lei de formação ou de correspondência:** É uma regra que permite associar a cada elemento de $A$ um elemento em $B$. Ou seja, é uma expressão matemática que nos permitirá definir como a função será representada. Dessa forma, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e assim, $f = \{(x, y) | x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$. Logo, a função $f$ tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

- **Diagrama de flechas:** É usado para relacionar os elementos de dois conjuntos $A$ e $B$ a partir da lei de correspondência. O conjunto $A$ será o conjunto de partida (local de onde sairá as flechas) a partir de cada um dos elementos de $A$. Já o conjunto $B$ será o conjunto de chegada, ou seja, local de onde chegará as pontas das flechas que se conectará a um dos elementos de $B$.
Em resumo, os elementos de $A$ são levados ao elementos de $B$ por meio de flechas que simbolizam a correspondência definida pela função. Note que, na figura 19, o conjunto $C$ representa a imagem de $f$.

Diagrama de flechas



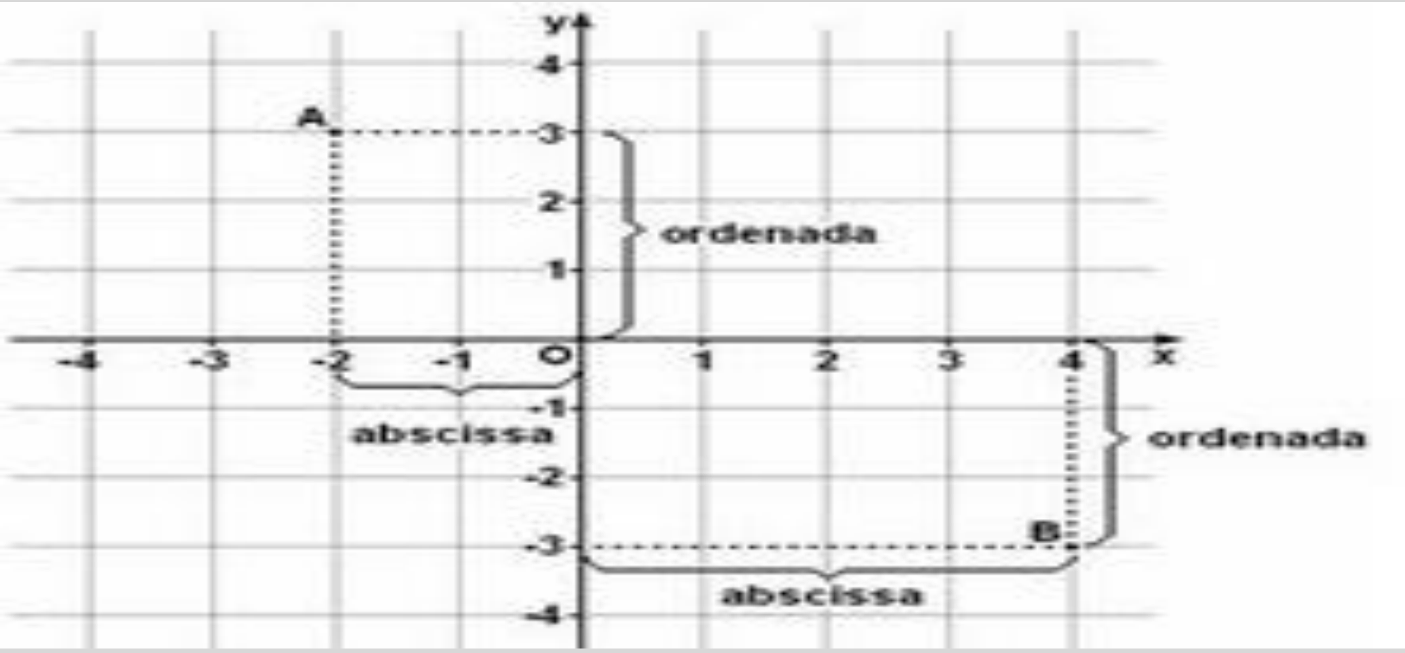

Mas nem todo diagrama de flechas representa uma função. Deve ficar claro que para ser uma função todo elemento de $A$ deve se relacionar com um único elemento de $B$. Vejamos alguns exemplos do que acabamos de expor.

## 5. Gráfico de uma função

Para entender o que é gráfico de uma função é necessário conhecer o que é plano cartesiano.

O plano cartesiano é composto por:

- eixo horizontal, ou eixo das abscissas, ou eixo dos valores de x, com uma escala (parecida com uma régua)
- eixo vertical, ou eixo das ordenadas, ou eixo dos valores de y, também com uma escala e
- um ponto chamado origem (Ponto O) formado pela intersecção dos dois eixos.

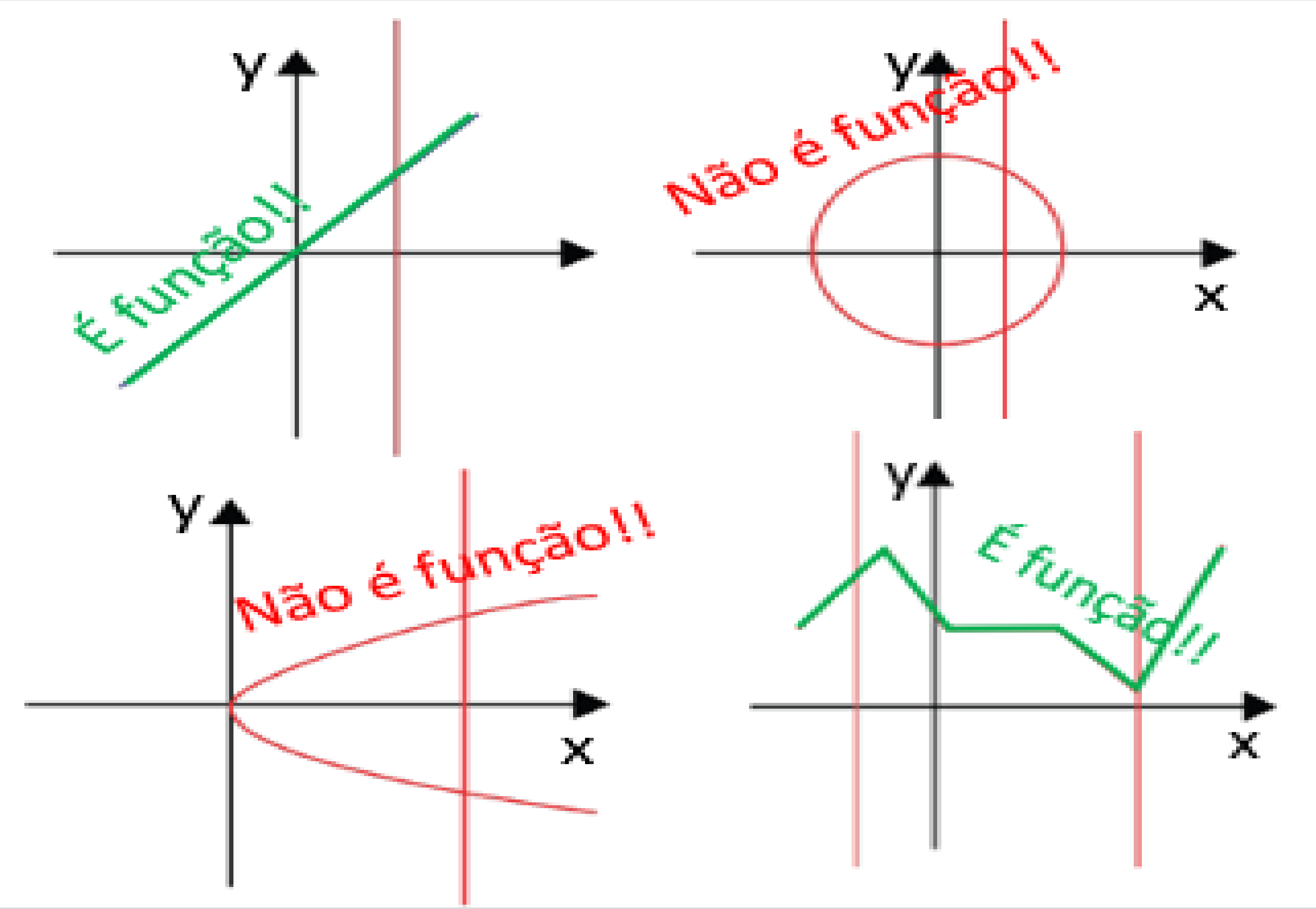



Para traçar o gráfico da função, deve-se proceder da seguinte forma, com alguns dos seus pontos representados pelos pares (x, y):

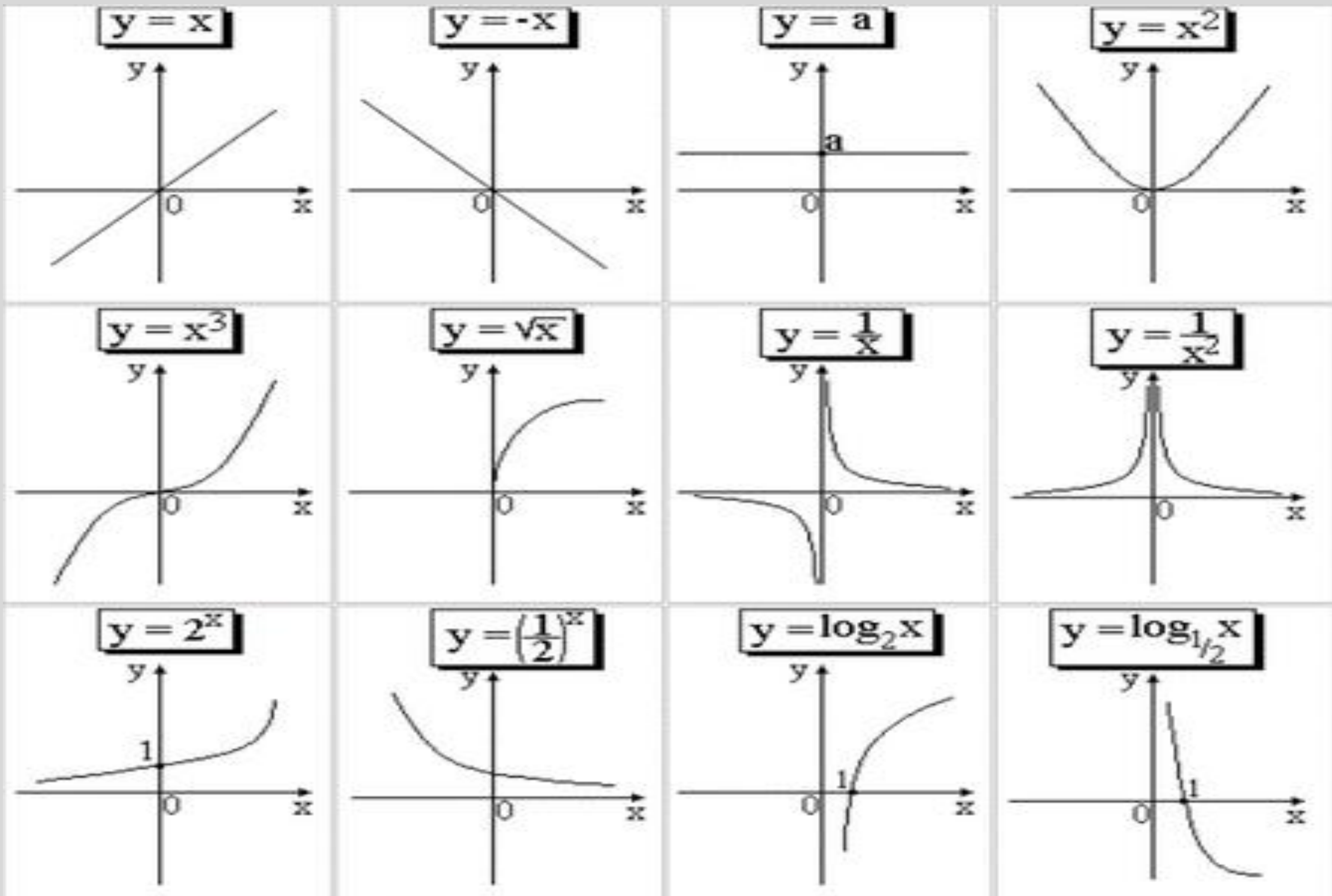
- para o primeiro ponto escolhido, p. ex., $\mathbf{P_1}$ ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$) marcar no eixo das abscissas o valor, de $\mathbf{x_1}$, e traçar uma reta vertical (pontilhada ou bem fraca) a partir dele;
- marcar o valor de $\mathbf{y_1}$, no eixo das ordenadas e traçar uma reta horizontal (pontilhada ou bem fraca) a partir dele;
- o cruzamento das retas vertical e horizontal traçadas, determina o ponto $\mathbf{P_1}$ no plano cartesiano;
- repetir esse procedimento para alguns outros pontos da função;

- unir esses pontos para desenhar o gráfico da função. Quanto maior o número de pontos e quanto menor as diferenças entre os valores de x e de y usados, melhor será a sua aparência final do gráfico.

**OBS**: para identificar se um determinado gráfico representa uma função, o critério é: não existir nenhum segmento de reta vertical que intercepte o gráfico em mais do que um ponto.



Seguem alguns gráficos de funções:



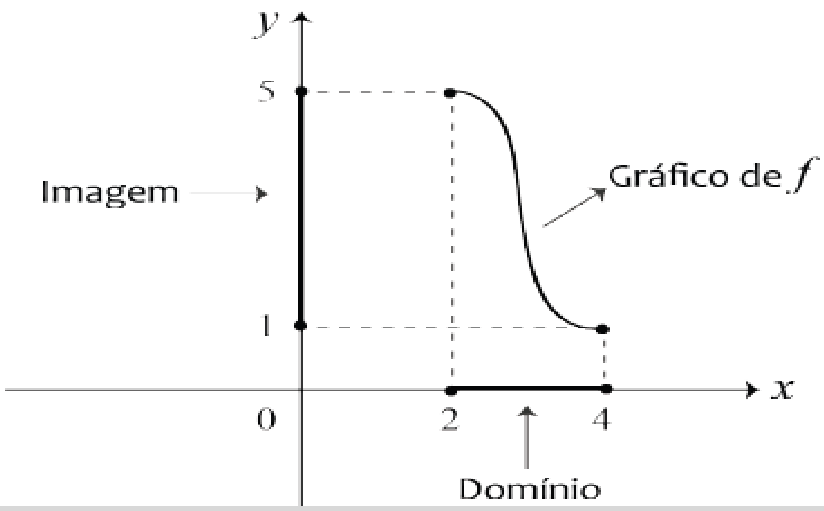
# 6. Determinação do domínio e imagem a partir do gráfico

**Definição** : Seja $f : A \to B$ uma função real de variável real. Definimos o gráfico de f, denotamos por $G(f)$, como sendo o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y)$, do plano cartesiano, tais que $y \in B$ é a imagem de $x \in A$, pela função *f*. Assim, $G(f) = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x) \in B\}$.

Com o gráfico de uma função *f*, podemos determinar seu domínio e imagem da seguinte maneira: o domínio corresponderá ao conjunto formado pelas abscissas dos pontos do gráfico de *f* enquanto que a imagem corresponderá ao conjunto formado pelas ordenadas dos pontos do gráfico de *f*. Além disso temos que nem todo gráfico do plano cartesiano está associado a uma função. Para verificarmos isso, devemos traçar, pelos pontos do domínio, retas paralelas ao eixo *y*, e se observarmos cada uma destas retas, elas devem cortar o gráfico de *f* em apenas um ponto. Caso isso não aconteça, dizemos que o gráfico não representa uma função.

**Exemplo :** Note, a partir da figura que o gráfico de *f* está definido no eixo $x$ no intervalo $[2,\ 4]$, ou seja, $D(f) = [2,4]$. Agora se observamos o eixo $y$ vemos que o gráfico de *f* está definido no intervalo $[1,\ 5]$ , ou seja, $Im(f) = [1,\ 5]$ .

Domínio e Imagem a partir do gráfico de $f$



## 7. Raiz ou zero de uma função

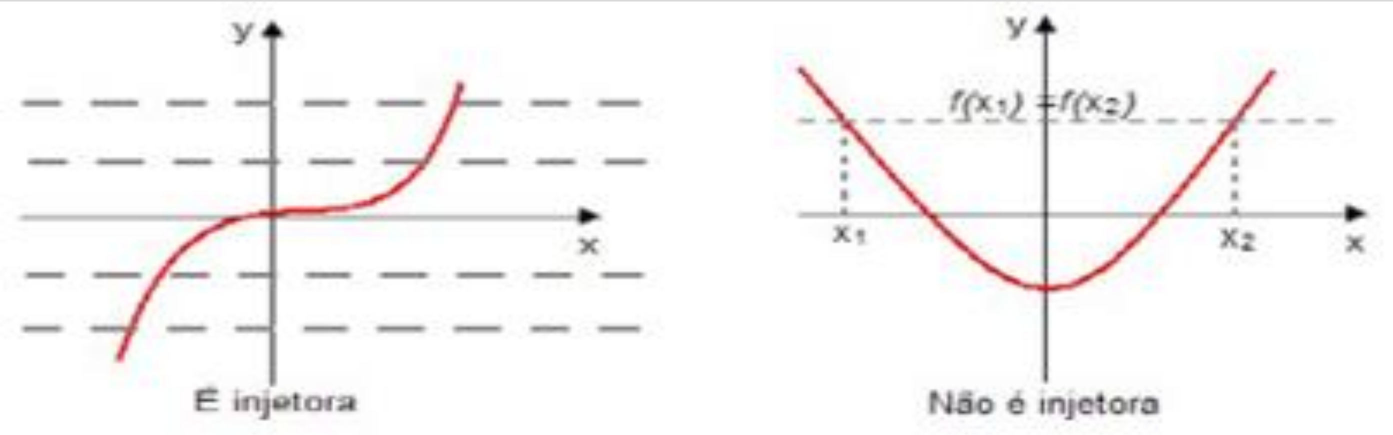
**Definição** : Chamamos de **zero** ou **raiz** de uma função a abscissa $x$ tal que sua imagem é o número zero.
Em outras palavras, a raiz de uma função $f$ será a solução da equação $f(x) = 0$.
Nem todas as funções possuem zeros ou raízes. Por exemplo, a função

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não possui nenhuma raiz.

De fato, não existe solução para a equação $\dfrac{1}{x} = 0$.

## 8. Classificação das funções (Injetora, Sobrejetora e Bijetora)

- **Função injetora**: Uma função f de A em B **f**: **A ➔ B** é dita injetora (ou injetiva) se, e somente se, quaisquer dois elementos distintos de seu domínio ($x_1 \neq x_2$) corresponderem a elementos distintos do conjunto B ($y_1 \neq y_2$).




- **Função Sobrejetora**: Seja f uma função de A em B **f**: **A ➔ B**. A função **f** é dita sobrejetora (ou sobrejetiva) se, e somente se o seu conjunto imagem for igual ao seu contradomínio, isto é, Im(f)=CD(f)= B. P. ex., f(x) = 2x

- **Função Bijetora:** Uma função f de A em B **f**: **A ➔ B** é denominada bijetora (ou bijetiva) quando é, simultaneamente, **injetora** e **sobrejetora**.

## 9. Função crescente e decrescente

- **Função crescente**: Uma função f é chamada de crescente em um intervalo [a, b] de seu domínio se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em [a, b], ou seja, à medida que aumenta o valor de x dentro do intervalo, as imagens correspondentes também aumentam;
- **Função decrescente**: A função f é dita decrescente em [a, b] se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em [a, b], ou seja, à medida que aumentam os valores de x dentro do intervalo, as imagens correspondentes diminuem.

## 10. Função Par e Ímpar

- **Função Par**: Uma função f é chamada de função par se, e somente se, $f(-x) = f(x)$, para todo x em seu domínio.
- **Função Ímpar**: Uma função f é dita função ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para todo x em seu domínio.

## 11. Operações com Funções

As funções podem ser combinadas e manipuladas de várias maneiras, assim como outros objetos matemáticos. Algumas das operações mais comuns envolvendo funções incluem:

- **Soma (adição)**:

Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, a soma delas, denotada por $(f+g)(x)$ ou $f(x)+g(x)$, é uma nova função cujos valores são a soma dos valores correspondentes de $f$ e $g$ para cada $x$.

- **Subtração**:

A divisão de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ou $\frac{f(x)}{g(x)}$, é uma nova função cujos valores são o quociente dos valores correspondentes de $f$ e $g$ para cada $x$. É importante notar que a divisão só é definida onde $g(x) \neq 0.$

- **Multiplicação**:

A multiplicação de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $(f \cdot g)(x)$ ou $f(x) \cdot g(x)$, é uma nova função cujos valores são o produto dos valores correspondentes de $f$ e $g$ para cada $x$.

- **Divisão**:

A divisão de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ou $\frac{f(x)}{g(x)}$, é uma nova função cujos valores são o quociente dos valores correspondentes de $f$ e $g$ para cada $x$. É importante notar que a divisão só é definida onde $g(x) \neq 0.$

- **Composição**:

A composição de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $(f \circ g)(x)$ ou $f(g(x))$, é uma nova função obtida aplicando primeiro $g$ a $x$ e, em seguida, aplicando $f$ ao resultado.

- **Inversão**:

Se uma função $f(x)$ tem um inverso, a operação de inversão denotada por $f^{-1}(x)$ é uma nova função tal que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Regra prática para se determinar a inversa de uma função:

1º passo: "Trocamos" a variável x por y e vice-versa na lei que define a função.
2º passo: "Isolamos" o y, obtendo, assim, a lei que define a função inversa.