IM020 – Geometria Analítica 1

1. Ponto, Reta e Plano 2
2. Equação da Reta (geral, reduzida e paramétrica) 5
3. Distâncias no Plano Cartesiano e no Espaço 9
4. Relação entre Retas 11
5. Equações de Retas Reversa no Espaço Tridimensional 13

1. Ponto, Reta e Plano

- Ponto, reta, plano
- Ponto médio

A Geometria Analítica é um ramo da matemática que estuda figuras geométricas utilizando um sistema de coordenadas e métodos algébricos. Ela faz a ponte entre a álgebra e a geometria, permitindo a representação de figuras geométricas em um plano cartesiano e a análise de suas propriedades através de equações.

1. Plano Cartesiano

O **plano cartesiano** é formado por dois eixos perpendiculares entre si:

- **Eixo x (abscissas)**: Representa a direção horizontal.
- **Eixo y (ordenadas)**: Representa a direção vertical.

Esses eixos se cruzam em um ponto chamado **origem** (0, 0). O plano cartesiano é dividido em quatro quadrantes:

- **1º Quadrante**: $x > 0$, $y > 0$
- **2º Quadrante**: $x < 0$, $y > 0$
- **3º Quadrante**: $x < 0$, $y < 0$
- **4º Quadrante**: $x > 0$, $y < 0$

2. Ponto

Um **ponto** no plano cartesiano é representado por um par ordenado (x, y), onde x é a coordenada horizontal e y a coordenada vertical. Exemplo: $(3, 2)$ representa um ponto localizado 3 unidades à direita da origem e 2 unidades acima.

3. Distância entre Dois Pontos

A distância d entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ no plano cartesiano pode ser calculada pela fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Essa fórmula deriva diretamente do teorema de Pitágoras.

4. Ponto Médio

O **ponto médio** $M(x_m, y_m)$ de um segmento de reta com extremidades nos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dado pela média aritmética das coordenadas dos pontos:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

5. Equação da Reta

A equação da reta no plano cartesiano pode ser expressa na forma geral:

$$Ax + By + C = 0$$

Onde A, B e C são constantes reais.

Outra forma comum é a **equação reduzida da reta**:

$$y = mx + b$$

onde:

- m é o coeficiente angular (inclinação da reta),
- b é o coeficiente linear (intercepto com o eixo y).

6. Condição de Paralelismo e Perpendicularidade

- **Retas paralelas** têm o mesmo coeficiente angular $m_1 = m_2$.
- **Retas perpendiculares** têm coeficientes angulares cujo produto é -1, ou seja, $m_1 \times m_2 = -1$.

7. Equação do Plano

Em três dimensões, um **plano** pode ser representado pela equação:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Onde A, B, C e D são constantes, e (x, y, z) são as coordenadas de qualquer ponto pertencente ao plano.

8. Distância de um Ponto a uma Reta

A distância d de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta $Ax + By + C = 0$ pode ser calculada pela fórmula:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

9. Distância de um Ponto a um Plano

A distância d de um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ a um plano $Ax + By + Cz + D = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Conclusão:

A Geometria Analítica oferece uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas geométricos por meio da álgebra. Com ela, podemos descrever e analisar pontos, retas e planos no espaço, calcular distâncias, determinar posições relativas e muito mais, tudo com base em coordenadas e equações algébricas.

2. Equação da Reta (geral, reduzida e paramétrica)

- Geral
- Reduzida
- Paramétrica
- Coeficientes angular e linear
- Representação gráfica da reta

A Equação da Reta

A equação da reta pode ser representada de diferentes formas, dependendo das informações disponíveis e do contexto em que a reta é utilizada. As formas mais comuns são a **geral**, a **reduzida** e a **paramétrica**. Vamos explorar cada uma delas, bem como os conceitos de coeficientes angular e linear e a representação gráfica da reta.

1. Equação Geral da Reta

A forma geral da equação da reta no plano cartesiano é:

$$Ax + By + C = 0$$

onde:

- A, B, e C são constantes reais;
- x e y são as variáveis que representam as coordenadas de um ponto qualquer (x, y) na reta.

Propriedades:

- A inclinação da reta depende da razão entre A e B.
- A reta é vertical se $B = 0$ (pois a equação se reduz a $Ax + C = 0$).
- A reta é horizontal se $A = 0$ (pois a equação se reduz a $By + C = 0$).

2. Equação Reduzida da Reta

A equação reduzida é a forma mais comum e prática para descrever uma reta:

$$y = mx + b$$

onde:

- m é o **coeficiente angular** (a inclinação da reta);
- b é o **coeficiente linear** (a interseção da reta com o eixo y).

Propriedades:

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou seja, a razão entre a variação de y e a variação de x ao mover-se ao longo da reta.
- b indica o ponto em que a reta cruza o eixo y.
- Quando $m = 0$, a reta é horizontal.
- Se m for positivo, a reta sobe da esquerda para a direita; se for negativo, desce.

Representação Gráfica:

- A inclinação m determina o ângulo que a reta faz com o eixo x.
- O valor b é o ponto em que a reta intersecta o eixo y.

3. Equação Paramétrica da Reta

A equação paramétrica expressa a reta como um conjunto de equações que definem as coordenadas x e y em termos de um parâmetro t:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

onde:

- (x_0, y_0) é um ponto qualquer da reta;
- a e b são as direções (ou vetores) da reta;
- t é o parâmetro que varia ao longo da reta.

Propriedades:

- Para cada valor de t, obtemos um ponto diferente na reta.
- A equação paramétrica é útil para descrever a reta em contextos de movimento ou em três dimensões.

Representação Gráfica:

- A direção da reta é determinada pelos vetores a e b.
- O ponto (x_0, y_0) é um ponto específico por onde a reta passa.

Coeficientes Angular e Linear

- **Coeficiente Angular (m):** Representa a inclinação da reta e indica como a variável y muda em relação a x. Matemática e geometricamente, $m = \tan(\theta)$, onde θ é o ângulo de inclinação da reta com o eixo x.
- **Coeficiente Linear (b):** Representa o valor de y quando $x = 0$, ou seja, o ponto em que a reta intercepta o eixo y.

Exemplo de Representação Gráfica

Considere a equação da reta na forma reduzida $y = 2x + 3$:

- **Coeficiente Angular** $m = 2$: A reta sobe 2 unidades para cada unidade que avança horizontalmente.
- **Coeficiente Linear** $b = 3$: A reta intercepta o eixo y no ponto $(0, 3)$.

A representação gráfica dessa reta mostraria uma linha reta que passa pelo ponto $(0, 3)$ e inclina-se para cima à medida que avança da esquerda para a direita.

Conclusão:

As diferentes formas da equação da reta oferecem ferramentas flexíveis para abordar problemas geométricos e algébricos. A forma geral é útil para manipulações algébricas, a forma reduzida é ideal para interpretação gráfica, e a forma paramétrica é fundamental em contextos dinâmicos ou tridimensionais. Compreender os coeficientes angular e linear é crucial para interpretar e representar corretamente retas no plano cartesiano.

3. Distâncias no Plano Cartesiano e no Espaço

- Entre pontos
- Entre ponto e reta
- Entre duas retas paralelas

Calcular distâncias é uma parte fundamental da geometria analítica. A seguir, abordaremos as fórmulas e conceitos para calcular distâncias em várias situações geométricas no plano cartesiano e no espaço tridimensional.

1. Distância entre Dois Pontos no Plano Cartesiano

Dada a fórmula de distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, a distância d entre eles é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Essa fórmula é derivada do teorema de Pitágoras, onde a distância é a hipotenusa de um triângulo retângulo formado pelas diferenças nas coordenadas x e y.

2. Distância entre um Ponto e uma Reta no Plano Cartesiano

A distância d de um ponto $P(x_0, y_0)$ a uma reta dada pela equação geral $Ax + By + C = 0$ é:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Essa fórmula mede a distância perpendicular do ponto à reta, garantindo que a distância seja mínima.

3. Distância entre Duas Retas Paralelas no Plano Cartesiano

Para duas retas paralelas com equações $Ax + By + C_1 = 0$ e $Ax + By + C_2 = 0$, a distância d entre elas é:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como as retas são paralelas, a distância entre elas é constante e perpendicular.

4. Distância entre um Ponto e um Plano

Em um espaço tridimensional, a distância d de um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ a um plano $Ax + By + Cz + D = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Essa fórmula é análoga à fórmula da distância de um ponto a uma reta, mas expandida para três dimensões.

5. Distância entre uma Reta Paralela a um Plano e o Plano

Quando uma reta r é paralela a um plano π, a distância entre eles é a distância de qualquer ponto da reta ao plano. Se a reta r tem direção $\mathbf{v}$ e passa por um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, e o plano tem equação $Ax + By + Cz + D = 0$, a distância d é:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Esse cálculo considera que a reta r não está contida no plano.

6. Distância entre Dois Planos Paralelos

Se dois planos paralelos têm equações $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ e $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, a distância d entre eles é:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Essa fórmula é similar à da distância entre retas paralelas, mas aplicada ao espaço tridimensional.

Conclusão:

O cálculo de distâncias em geometria analítica é essencial para entender relações espaciais entre pontos, linhas e planos. As fórmulas abordadas fornecem ferramentas para medir essas distâncias de forma precisa, seja no plano cartesiano ou no espaço tridimensional, sendo amplamente utilizadas em diversas aplicações na matemática, física e engenharia.

4. Relação entre Retas

- Paralelas;
- Perpendiculares;
- Concorrentes
- Reversas
- Interseção entre retas

1. Retas Paralelas

Duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, inclinações iguais, mas nunca se cruzam. Na forma reduzida, as equações das retas $r_1 : y = m_1x + b_1$ e $r_2 : y = m_2x + b_2$ são paralelas se $m_1 = m_2$. Isso significa que ambas as retas possuem a mesma inclinação, mas interceptam o eixo y em diferentes pontos.

2. Retas Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Para as retas $r_1 : y = m_1x + b_1$ e $r_2 : y = m_2x + b_2$, elas serão perpendiculares se $m_1 \cdot m_2 = -1$. Isso implica que uma reta tem a inclinação negativa do inverso da outra, formando um ângulo de 90° entre elas.

3. Retas Reversas

Duas retas são chamadas de reversas quando não são coplanares, ou seja, não há um plano único que contenha ambas as retas. No espaço tridimensional, retas reversas não são paralelas nem se interceptam. Para determinar se duas retas são reversas, verifica-se que não há solução comum entre as equações paramétricas das duas retas, indicando que não estão no mesmo plano.

4. Retas Concorrentes

Retas concorrentes são aquelas que se encontram em um único ponto. Elas podem ter inclinações diferentes, mas compartilham um ponto de interseção. Para determinar se duas retas r_1 e r_2 são concorrentes, é necessário resolver o sistema formado pelas equações das duas retas. Se houver uma solução comum, as retas são concorrentes, e essa solução representa o ponto de interseção.

5. Interseção entre Retas

A interseção entre duas retas é o ponto em que elas se encontram. Para encontrar o ponto de interseção entre duas retas $r_1 : y = m_1x + b_1$ e $r_2 : y = m_2x + b_2$, igualamos as equações:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

Resolvendo a equação para x e substituindo em uma das equações originais, obtemos a coordenada y. Se $m_1 = m_2$ e $b_1 \neq b_2$, as retas são paralelas e não há ponto de interseção. Se $m_1 = m_2$ e $b_1 = b_2$, as retas são coincidentes, ou seja, têm todos os pontos em comum.

Aplicações e Observações

Esses conceitos são fundamentais em geometria analítica para entender a posição relativa entre retas e suas aplicações em problemas envolvendo gráficos, construção de objetos, e na modelagem matemática de fenômenos físicos e espaciais.

5. Equações de Retas Reversa no Espaço Tridimensional

No espaço tridimensional, as retas reversas são definidas por não estarem em um mesmo plano e, portanto, não se cruzam. Para representar as equações de duas retas no espaço tridimensional, utilizamos as equações paramétricas, que expressam as coordenadas x, y e z em termos de um parâmetro.

Equações Paramétricas de Retas no Espaço Tridimensional

A equação paramétrica de uma reta no espaço tridimensional pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Onde:

- (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto da reta.
- (a, b, c) são as componentes do vetor diretor da reta.
- t é o parâmetro.

Exemplo de Duas Retas Reversas

Considere as retas r_1 e r_2 no espaço tridimensional com as seguintes equações paramétricas:

1. **Reta** r_1:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

2. **Reta** r_2:

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$$

Onde t e s são os parâmetros das retas r_1 e r_2, respectivamente.

Para verificar se as retas são reversas, analisamos se não há valores de t e s que satisfaçam simultaneamente as três equações. Se não houver tal par de valores, as retas são reversas.

Verificação de Retas Reversas

Para que as retas r_1 e r_2 não sejam reversas, deve existir um ponto em comum, o que implicaria na existência de um sistema de equações compatível. Ao resolver o sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 + s \\ -1 + 3t = 3 + 2s \\ 4t = -1 + s \end{cases}$$

Se não encontrarmos uma solução comum para t e s, concluímos que as retas são reversas.

Neste exemplo, ao resolver o sistema, pode-se verificar que não há solução comum para t e s, confirmando que as retas r_1 e r_2 são, de fato, reversas.