# IM021 -Geometria Analítica 2

1. **Circunferência: Introdução**
    - Definição;
    - Equação da circunferência (geral e reduzida);
    - Parâmetros importantes da circunferência;
    - Representação gráfica

**Definição**

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos em um plano que estão a uma distância fixa, chamada de **raio** ($r$), de um ponto fixo, chamado de **centro** ($C$). Em termos matemáticos, se $C(h, k)$ é o centro da circunferência e $P(x, y)$ é um ponto sobre a circunferência, a distância entre $P$ e $C$ é igual ao raio $r$.

**Equação da Circunferência**

**1. Equação Reduzida**

A equação reduzida da circunferência pode ser derivada da definição. A distância entre $P(x, y)$ e $C(h, k)$ é dada pela fórmula:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando ambos os lados ao quadrado para eliminar a raiz quadrada, temos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta é a **equação reduzida da circunferência**, onde:

- $(h, k)$ são as coordenadas do centro.
- $r$ é o raio da circunferência.

**2. Equação Geral**

Expandindo a equação reduzida, obtemos a forma geral da equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Ou, de forma mais simples:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Onde:

- $D = -2h$
- $E = -2k$
- $F = h^2 + k^2 - r^2$

Para encontrar o centro e o raio a partir da equação geral, podemos completar os quadrados:

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}\right)^2$$

O centro $(h, k)$ é $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, e o raio $r$ é $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

**Parâmetros Importantes da Circunferência**

1. **Centro** $(h, k)$: É o ponto a partir do qual todos os pontos da circunferência estão a uma distância $r$.
2. **Raio** $r$: A distância constante de qualquer ponto da circunferência ao centro.
3. **Diâmetro**: O dobro do raio $D = 2r$.
4. **Circunferência**: O comprimento da circunferência é $2\pi r$.
5. **Área do Círculo**: Se considerarmos o círculo (a área interna da circunferência), sua área é dada por $\pi r^2$.

### Representação Gráfica

Graficamente, a circunferência é representada como um círculo em um plano cartesiano, centrada no ponto $(h, k)$ com raio $r$. Para esboçar a circunferência:

1. **Identifique o centro** $(h, k)$ no plano cartesiano.
2. **Marque o raio** $r$ a partir do centro em todas as direções.
3. **Desenhe a circunferência** mantendo a distância constante $r$ do centro.

## Aplicações e Observações

As circunferências são fundamentais na geometria e aparecem em várias áreas da matemática e ciências, desde problemas simples de geometria até aplicações complexas em física, engenharia e gráficos computacionais. Entender as equações e características da circunferência é essencial para resolver problemas que envolvem movimentos circulares, formas redondas, e padrões cíclicos.

## 2. Relações na Circuferência

- Retas tangentes, secantes e externas à circunferência
- Interseção entre reta e circunferência
- Posição relativa entre circunferências

### 1. Retas Tangentes à Circunferência

Uma reta é dita **tangente** a uma circunferência quando toca a circunferência em exatamente um ponto. Esse ponto é chamado de **ponto de tangência**. A propriedade fundamental das tangentes é que a reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de tangência.

**Equação da reta tangente:** Para uma circunferência com centro $(h, k)$ e raio $r$, e uma reta $y = mx + c$, a reta será tangente à circunferência se satisfizer a condição:

$$d = \frac{|mh - k + c|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$$

Onde $d$ é a distância do centro da circunferência à reta. Se essa distância for igual ao raio $r$, a reta é tangente.

### 2. Retas Secantes à Circunferência

Uma reta é **secante** à circunferência quando intersecta a circunferência em dois pontos distintos. A secante, ao contrário da tangente, não é perpendicular ao raio em nenhum dos pontos de interseção.

Para determinar se uma reta é secante, substituímos a equação da reta na equação da circunferência e analisamos o discriminante da equação resultante. Se o discriminante for positivo, a reta intersecta a circunferência em dois pontos distintos, caracterizando-a como secante.

### 3. Retas Externas à Circunferência

Uma reta é **externa** à circunferência se não a intersecta em nenhum ponto. Nesse caso, a distância $d$ do centro da circunferência à reta é maior que o raio $r$. Geometricamente, isso significa que a reta e a circunferência não possuem nenhum ponto em comum.

**Condição para uma reta ser externa:**

$$d > r$$

### 4. Interseção entre Reta e Circunferência

Para determinar os pontos de interseção entre uma reta e uma circunferência, substituímos a equação da reta na equação da circunferência e resolvemos o sistema resultante.

Considere a circunferência com equação reduzida:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

E uma reta $y = mx + c$. Substituindo $y = mx + c$ na equação da circunferência:

$$(x - h)^2 + (mx + c - k)^2 = r^2$$

Expanda e simplifique a equação para encontrar os valores de $x$. Esses valores de $x$, quando substituídos na equação da reta, fornecerão os valores correspondentes de $y$, determinando assim os pontos de interseção.

O número de soluções (ou seja, o discriminante) determina a relação:

- **Discriminante > 0**: A reta é secante (duas interseções).
- **Discriminante = 0**: A reta é tangente (uma interseção).
- **Discriminante < 0**: A reta é externa (nenhuma interseção).

**5. Posição Relativa entre Circunferências**

A posição relativa entre duas circunferências depende das distâncias entre seus centros e a soma/subtração dos raios.

Considere duas circunferências $C_1$ e $C_2$ com centros $(h_1, k_1)$ e $(h_2, k_2)$, e raios $r_1$ e $r_2$, respectivamente. A distância entre os centros é $d = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + (k_2 - k_1)^2}$.

As possíveis posições relativas são:

1. **Externas:** As circunferências não se intersectam e estão separadas, ou seja, $d > r_1 + r_2$.
2. **Tangentes Externas:** As circunferências se tocam externamente em um único ponto, ou seja, $d = r_1 + r_2$.
3. **Secantes:** As circunferências se intersectam em dois pontos, ou seja, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.
4. **Tangentes Internas:** As circunferências se tocam internamente em um único ponto, ou seja, $d = |r_1 - r_2|$.
5. **Internas:** Uma circunferência está completamente dentro da outra sem interseção, ou seja, $d < |r_1 - r_2|$.
6. **Concêntricas:** As circunferências têm o mesmo centro, ou seja, $d = 0$, e são distintas se $r_1 \neq r_2$.

## Conclusão

Entender as relações entre retas e circunferências e entre diferentes circunferências é fundamental para resolver uma ampla gama de problemas em geometria analítica. Essas noções são aplicadas em diversos campos, como design gráfico, arquitetura e engenharia, onde a precisão na representação e análise de formas geométricas é essencial.

## 3. Elipse:

- Definição;
- Equação da elipse (geral e reduzida);
- Parâmetros importantes da elipse;
- Representação gráfica

**Definição:** A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (focos) é constante. Os dois pontos fixos são chamados de focos da elipse, e a constante é maior que a distância entre os focos.

### Equação da Elipse

A equação da elipse pode ser expressa de duas formas, dependendo da orientação de seu eixo maior.

1. **Eixo maior paralelo ao eixo x:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. **Eixo maior paralelo ao eixo y:**

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Onde:

- $a$ é o comprimento do semi-eixo maior.
- $b$ é o comprimento do semi-eixo menor.
- $c$ é a distância do centro ao foco, onde $c^2 = a^2 - b^2$.

## Parâmetros Importantes da Elipse

1. **Centro:** O ponto médio entre os focos é o centro da elipse, geralmente localizado na origem $(0, 0)$ para elipses centradas na origem.
2. **Eixos:**
   - **Eixo Maior:** É o maior segmento de reta que pode ser traçado dentro da elipse, passando pelos focos.
   - **Eixo Menor:** É o segmento de reta perpendicular ao eixo maior, passando pelo centro da elipse.
3. **Focos ($F_1$ e $F_2$):** São os dois pontos fixos mencionados na definição. A soma das distâncias de qualquer ponto na elipse a esses dois focos é constante e igual a $2a$.
4. **Excentricidade ($e$):** A excentricidade da elipse é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

   A excentricidade varia entre 0 (quando a elipse é um círculo) e 1 (quando a elipse tende a uma linha reta).

5. **Distância focal:** A distância entre os focos é $2c$.

## Representação Gráfica da Elipse

A representação gráfica da elipse envolve a plotagem dos pontos que satisfazem a equação da elipse. Os eixos maior e menor determinam o tamanho e a orientação da elipse no plano. Em uma elipse com centro na origem e eixo maior ao longo do eixo x, a elipse se estende de $-a$ a $a$ no eixo x e de $-b$ a $b$ no eixo y.

- **Eixo Maior Paralelo ao Eixo x:**
  - A elipse se alonga horizontalmente.
  - A equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- **Eixo Maior Paralelo ao Eixo y:**
  - A elipse se alonga verticalmente.
  - A equação é $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Essa abordagem cobre os conceitos fundamentais sobre a elipse, fornecendo a base para o entendimento de sua equação, parâmetros e representação gráfica.

## 4. Hiperbole:

- Definição;
- Equação da hiperbole;
- Parâmetros importantes da hipérbole;
- Representação gráfica

**Definição:** A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos em um plano tal que o valor absoluto da diferença das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (focos) é constante. Diferentemente da elipse, a hipérbole tem duas partes ou ramos, que se abrem em direções opostas.

### Equação da Hipérbole

A equação da hipérbole depende da orientação de seus eixos.

1. **Eixos principais ao longo do eixo x:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. **Eixos principais ao longo do eixo y:**

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Onde:

- $a$ é a distância do centro aos vértices da hipérbole.
- $b$ é relacionado à distância entre os assimptotos e o eixo dos vértices.
- $c$ é a distância do centro ao foco, onde $c^2 = a^2 + b^2$.

## Parâmetros Importantes da Hipérbole

1. **Centro:** O ponto médio entre os dois focos é o centro da hipérbole, geralmente na origem $(0, 0)$ para hipérboles centradas na origem.
2. **Eixos:**
   - **Eixo Transversal:** É o eixo que passa pelos vértices da hipérbole, ligando-os diretamente. Seu comprimento é $2a$.
   - **Eixo Conjugado:** É perpendicular ao eixo transversal e seu comprimento é $2b$.
3. **Focos ($F_1$ e $F_2$):** São os dois pontos fixos mencionados na definição. A diferença das distâncias de qualquer ponto na hipérbole a esses dois focos é constante e igual a $2a$.
4. **Vértices:** Os vértices são os pontos onde a hipérbole corta o eixo transversal. Estão localizados a uma distância $a$ do centro.
5. **Excentricidade ($e$):** A excentricidade da hipérbole é dada por:

   $$e = \frac{c}{a}$$

   A excentricidade da hipérbole é sempre maior que 1.
6. **Assimptotos:** As retas que passam pelo centro da hipérbole e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ formam os assimptotos da hipérbole. As ramos da hipérbole se aproximam dessas retas à medida que se afastam do centro.

## Representação Gráfica da Hipérbole

A representação gráfica da hipérbole envolve a plotagem dos ramos que satisfazem a equação da hipérbole. Esses ramos se estendem indefinidamente e se aproximam das linhas dos assimptotos.

- **Eixo Transversal Paralelo ao Eixo x:**
  - A hipérbole se abre horizontalmente.
  - A equação é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- **Eixo Transversal Paralelo ao Eixo y:**
  - A hipérbole se abre verticalmente.
  - A equação é $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Os assimptotos, que cruzam no centro da hipérbole, orientam a abertura dos ramos e ajudam a determinar a forma da curva.

Essa abordagem cobre os principais conceitos sobre a hipérbole, incluindo a definição, equação, parâmetros importantes e representação gráfica, proporcionando uma compreensão clara dessa curva cônica.

## 5. Parábola

- Definição;
- Equação da parábola (geral e reduzida);
- Parâmetros importantes da parábola (vértice, foco, etc)
- Concavidade da Parábola;
- Representação gráfica;
- Propriedades no aumento ou redução dos coeficientes angulares e lineares da equação da parábola.

**Definição:** A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo (foco) e de uma reta fixa (diretriz). A parábola é uma das cônicas que tem um formato característico de "U" ou "inverso de U", dependendo de sua orientação.

### Equação da Parábola

A equação da parábola varia conforme a orientação de seu eixo.

1. **Eixo de simetria paralelo ao eixo y:**

$$y = ax^2 + bx + c$$

ou, em sua forma canônica:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

2. **Eixo de simetria paralelo ao eixo x:**

$$x = ay^2 + by + c$$

ou, em sua forma canônica:

$$x = a(y - k)^2 + h$$

Onde:

- $(h, k)$ é o vértice da parábola.
- $a$ determina a abertura da parábola.
- $b$ e $c$ são coeficientes que determinam a posição da parábola no plano.

## Parâmetros Importantes da Parábola

1. **Vértice:** O vértice $(h, k)$ é o ponto onde a parábola atinge seu ponto mínimo (ou máximo, dependendo da orientação). É o ponto de inflexão da curva.
2. **Foco:** O foco é um ponto fixo $(h, k + \frac{1}{4a})$ para parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo y. A parábola "envolve" o foco.
3. **Diretriz:** A diretriz é uma reta horizontal ou vertical, dependendo da orientação da parábola, que está localizada a uma distância $\frac{1}{4a}$ do vértice e é perpendicular ao eixo de simetria.
4. **Eixo de Simetria:** A parábola é simétrica em relação a uma linha vertical (ou horizontal) que passa pelo vértice. Essa linha é chamada de eixo de simetria.

## Representação Gráfica da Parábola

A representação gráfica da parábola envolve a plotagem dos pontos que satisfazem a equação quadrática. Dependendo do valor de $a$:

- $a > 0$: A parábola abre para cima (ou para a direita, se o eixo de simetria for paralelo ao eixo x).
- $a < 0$: A parábola abre para baixo (ou para a esquerda, se o eixo de simetria for paralelo ao eixo x).

### Propriedades ao Aumentar ou Reduzir os Coeficientes $a$, $b$ e $c$

1. **Coeficiente $a$:**
   - **Aumento de $a$:** Faz com que a parábola fique mais estreita, ou seja, seus braços se aproximam.
   - **Redução de $a$:** Faz com que a parábola fique mais larga, ou seja, seus braços se afastam.
2. **Coeficiente $b$:**
   - **Alteração de $b$:** Afeta a inclinação do eixo de simetria e a posição do vértice. Um aumento ou redução de $b$ desloca a parábola horizontalmente no caso de parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo y.
3. **Coeficiente $c$:**
   - **Alteração de $c$:** Desloca a parábola verticalmente (ou horizontalmente, dependendo da orientação) sem alterar a forma da curva. Ele basicamente determina o ponto onde a parábola cruza o eixo y (ou o eixo x).

Essa abordagem cobre os conceitos fundamentais sobre a parábola, incluindo a definição, equação, parâmetros importantes, representação gráfica e as propriedades resultantes da alteração dos coeficientes na equação da parábola.

## 6. Catenária

- Definição;
- Equação da hiperbole;
- Parâmetros importantes da hipérbole;
- Representação gráfica

**Definição:** A catenária é a curva formada por uma corda ou corrente uniforme suspensa pelos seus extremos e sujeita apenas à força da gravidade. Diferente de uma parábola, a catenária tem uma forma específica descrita por uma função hiperbólica.

### Equação da Catenária

A equação da catenária é dada por:

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Onde:

- $\cosh(x)$ é a função cosseno hiperbólico.
- $a$ é uma constante que determina a "altura" da curva. Está relacionada à distância mínima entre o ponto mais baixo da curva e o eixo horizontal (diretriz).

### Parâmetros Importantes da Catenária

1. **Parâmetro $a$:**
   - O valor de $a$ define a escala vertical da curva. Um valor maior de $a$ resulta em uma curva mais "esticada" e "larga", enquanto um valor menor de $a$ resulta em uma curva mais "curva" e "estreita".
2. **Ponto mais baixo:**
   - O ponto mais baixo da catenária é conhecido como o vértice, localizado em $(0, a)$ no sistema de coordenadas padrão.
3. **Simetria:**
   - A catenária é uma curva simétrica em relação ao eixo y, ou seja, a curva à esquerda do eixo y é o espelho da curva à direita.

## Representação Gráfica da Catenária

A catenária tem uma forma característica que se assemelha a uma curva suave e simétrica, com o ponto mais baixo no eixo y e os braços se estendendo para cima à medida que se afastam do eixo.

- **Quando $a$ aumenta:**
  - A curva fica mais larga e menos acentuada.
- **Quando $a$ diminui:**
  - A curva fica mais estreita e mais acentuada.

A catenária é frequentemente observada em estruturas como pontes suspensas, onde cabos de aço pendem entre dois pontos fixos, ou em fios de transmissão de eletricidade.

Essa abordagem cobre os aspectos fundamentais sobre a catenária, incluindo sua definição, equação, parâmetros importantes e representação gráfica, fornecendo uma visão clara dessa curva matemática e suas aplicações práticas.

## 7. Funções Hiperbólicas

- Definição;

As funções hiperbólicas são análogas às funções trigonométricas, mas são baseadas em exponenciais em vez de círculos unitários. Elas aparecem em várias áreas da matemática, física e engenharia, particularmente em problemas envolvendo hiperbolas, catenárias e em soluções de equações diferenciais.

### Definição das Funções Hiperbólicas

1. **Seno Hiperbólico** ($\sinh(x)$):

   A função seno hiperbólico é definida por:

   $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   Onde $e$ é a base do logaritmo natural (aproximadamente 2,718).

2. **Cosseno Hiperbólico** ($\cosh(x)$):

   A função cosseno hiperbólico é definida por:

   $$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. **Tangente Hiperbólica** ($\tanh(x)$):

   A função tangente hiperbólica é definida como a razão entre o seno e o cosseno hiperbólicos:

   $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4. **Cotangente Hiperbólica** ($\coth(x)$):

   A função cotangente hiperbólica é o inverso da tangente hiperbólica:

   $$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

5. **Secante Hiperbólica ($\operatorname{sech}(x)$):**

   A função secante hiperbólica é o inverso do cosseno hiperbólico:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

6. **Cossecante Hiperbólica ($\operatorname{csch}(x)$):**

   A função cossecante hiperbólica é o inverso do seno hiperbólico:

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

## Propriedades das Funções Hiperbólicas

1. **Identidades Fundamentais:**

   - **Identidade Pitagórica Hiperbólica:**

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

   - **Tangente e Secante Hiperbólicas:**

$$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$$

   - **Cotangente e Cossecante Hiperbólicas:**

$$\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$$

2. Derivadas:

- Derivada do Seno Hiperbólico:

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

- Derivada do Cosseno Hiperbólico:

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

- Derivada da Tangente Hiperbólica:

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

- Derivada da Cotangente Hiperbólica:

$$\frac{d}{dx}\coth(x) = -\operatorname{csch}^2(x)$$

- Derivada da Secante Hiperbólica:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$$

- Derivada da Cossecante Hiperbólica:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$$

3. **Antiderivadas:**

- **Antiderivada do Seno Hiperbólico:**

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$$

- **Antiderivada do Cosseno Hiperbólico:**

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$$

- **Antiderivada da Tangente Hiperbólica:**

$$\int \tanh(x)\,dx = \ln(\cosh(x)) + C$$

- **Antiderivada da Cotangente Hiperbólica:**

$$\int \coth(x)\,dx = \ln(\sinh(x)) + C$$

- **Antiderivada da Secante Hiperbólica:**

$$\int \operatorname{sech}(x)\,dx = \arctan(\sinh(x)) + C$$

- **Antiderivada da Cossecante Hiperbólica:**

$$\int \operatorname{csch}(x)\,dx = \ln\left(\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

## Representação Gráfica das Funções Hiperbólicas

1. **Seno Hiperbólico** ($\sinh(x)$)**:**
   - A função $\sinh(x)$ é uma curva crescente que passa pela origem. Para valores positivos de $x$, $\sinh(x)$ cresce exponencialmente, e para valores negativos de $x$, $\sinh(x)$ decresce exponencialmente, mas sempre simetricamente em relação à origem.
2. **Cosseno Hiperbólico** ($\cosh(x)$)**:**
   - A função $\cosh(x)$ é uma curva simétrica em relação ao eixo y, com um mínimo em $x = 0$ onde $\cosh(0) = 1$. À medida que $x$ se afasta da origem em qualquer direção, $\cosh(x)$ cresce exponencialmente.

3. **Tangente Hiperbólica ($\tanh(x)$):**
    - A função $\tanh(x)$ tem um formato sigmoide, onde para valores grandes de $x$, ela se aproxima de $1$, e para valores grandes e negativos de $x$, ela se aproxima de $-1$. Ela cruza a origem e é simétrica em relação a ela.
4. **Cotangente Hiperbólica ($\coth(x)$):**
    - A função $\coth(x)$ diverge para $+\infty$ conforme $x$ se aproxima de $0$ e, ao se afastar de $0$, converge para $1$ e $-1$ para valores positivos e negativos de $x$, respectivamente.

5. **Secante Hiperbólica ($\text{sech}(x)$):**
    - A função $\text{sech}(x)$ é uma curva simétrica em relação ao eixo y, com um máximo em $x = 0$ onde $\text{sech}(0) = 1$. À medida que $x$ se afasta da origem, a função decresce rapidamente para $0$.
6. **Cossecante Hiperbólica ($\text{csch}(x)$):**
    - A função $\text{csch}(x)$ tem um comportamento similar à $\coth(x)$, diverge para $\pm\infty$ conforme $x$ se aproxima de $0$, e converge para $0$ para valores positivos e negativos de $x$.

## Aplicações das Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas têm várias aplicações em matemática e física:

- **Catenárias:** A catenária, a curva que descreve uma corrente pendurada, é descrita pela função cosseno hiperbólico.
- **Equações diferenciais:** Elas aparecem naturalmente em soluções de equações diferenciais que modelam fenômenos como a difusão de calor, ondas em cordas e vibrações.
- **Teoria da relatividade:** As funções hiperbólicas são usadas em transformações de Lorentz em física relativística.
- **Geometria Hiperbólica:** As funções hiperbólicas são fundamentais na geometria hiperbólica, que é uma não-euclidiana.

Essa descrição completa cobre a definição, propriedades, representações gráficas e aplicações das funções hiperbólicas, proporcionando uma compreensão abrangente de seu comportamento e utilidade.