IM025 – Análise Combinatória

1. Introdução

A análise combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados a contagem, como, p. ex., determinar a quantidade de agrupamentos, que podem ser formados a partir de um ou mais conjuntos, obedecendo uma condição específica, sem a necessidade de numerá-los, ou seja, sem a necessidade de fazer uma lista contendo todos os casos.

Esse ramo da matemática que começou a se desenvolver no início do século XVIII, com o estudo sobre jogos envolvendo dados e cartas, é muito utilizado nos estudos sobre probabilidade, uma vez que, as quantidades de agrupamentos podem ser associadas às possibilidades de ocorrência de certos casos dentro de um conjunto relacionado a uma determinada população.

Os agrupamentos, objeto de estudo da análise combinatória, são os que podem ser determinados pelo princípio fundamental da contagem, sendo eles a **permutação**, a **combinação** e o **arranjo**. O uso de cada um destes métodos de cálculo, depende do objetivo da contagem.

A análise combinatória também exige o conhecimento de uma operação específica, que é o fatorial de um número, representado pelo símbolo de exclamação – “!”. Aplicado aos números inteiros, o fatorial de um número é o produto desse número por todos seus antecessores, até o 1.

2. Princípio Fundamental da Contagem PFC ou Princípio Multiplicativo - (novo)

O princípio fundamental da contagem (PFC) é um conceito fundamental da análise combinatória. A partir dele, são desenvolvidos conceitos como a fórmula de fatorial, combinação, arranjo, permutação.

Esse princípio é usado para determinar a quantidade total de possibilidades de executar um processo, composto por várias etapas, sendo que cada etapa pode ser realizada de várias maneiras diferentes. Por exemplo, combinar:

- peças de roupas (p. ex., com 3 camisas e 4 calças) para se vestir,
- tipos de comidas (p. ex., 4 entradas, 3 pratos principais e 4 sobremesas) para montar um cardápio,

sem que seja necessário montar uma lista com todos os casos. Em outras palavras, o PFC é aplicado quando se deseja calcular o número de resultados possíveis de um processo, composto por várias etapas em sequência, sendo que cada etapa pode ser realizada de várias maneiras.

<u>Exemplo 1</u>: Considere, um processo composto pelas etapas **A**, **B** e **C**. Considere, também, que as maneiras de executar cada uma das etapas seja, **A ==> 3**, **B ==> 2** e **C ==> 2**. Vamos mostrar em uma tabela de quantos maneiras diferentes o processo pode ser executado, e na sequência, ver que a quantidade de maneiras pode ser determinada sem uso de tabelas.

Maneiras de executar a Etapa A	Maneira de executar a Etapa B, para cada maneira da Etapa A	Maneira de executar a Etapa C, para cada maneira das etapas A e B	Maneira de Executar o Processo (nome)	Maneira de Executar o Processo (número)
Maneira A1	Maneira B1	Maneira C1	**A1B1C1**	**1**
		Maneira C2	**A1B1C2**	**2**
	Maneira B2	Maneira C1	**A1B2C1**	**3**
		Maneira C2	**A1B2C2**	**4**
Maneira A2	Maneira B1	Maneira C1	**A2B1C1**	**5**
		Maneira C2	**A2B1C2**	**6**
	Maneira B2	Maneira C1	**A2B2C1**	**7**
		Maneira C2	**A2B2C2**	**8**
Maneira A3	Maneira B1	Maneira C1	**A3B1C1**	**9**
		Maneira C2	**A3B1C2**	**10**
	Maneira B2	Maneira C1	**A3B2C1**	**11**
		Maneira C2	**A3B2C2**	**12**

Pela tabela acima, é possível verificar, sobre o processo como um todo:

- que existem 12 maneiras diferentes de executá-lo;
- que esse número pode ser calculado multiplicando-se o número de maneiras que cada etapa pode ser resolvida: **3x2x3 =12**.

Exemplo 2: Considere, um processo composto pelas etapas **A**, **B**, **C** e **D**. Considere, também, que as maneiras de executar cada uma das etapas seja, **A ==> 5**, **B ==> 4**, **C ==> 6** e **D ==> 2**. De acordo com o raciocínio usado no exemplo anterior, o número total de maneiras de executar o processo é: **5x4x6x2 = 240**.

Neste exemplo, seria muito trabalhoso construir uma tabela e determinar o total de possibilidades de execução do processo.

Generalizando, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) pode ser descrito da seguinte forma:

"Se desejamos executar uma sequência de n ações, onde a primeira ação pode ser executada de m_1 maneiras, a segunda de m_2 maneiras e assim sucessivamente, até que a n-ésima ação, que pode ser executada de m_n maneiras, então o número total de maneiras de executar essa sequência de ações é igual ao produto $m_1 m_2 \ldots m_n$."

O PFC é conhecido, também, com Princípio Multiplicativo, por conta da maneira com que é expresso matematicamente.

Na colocação feita acima, com exemplos e com a descrição genérica do PFC de forma genérica, as etapas em sequência consideradas para executar a ação completa, eram independentes da etapa anterior. Mas pode haver casos onde o número de maneiras de uma etapa, dependa da maneira escolhida na etapa anterior. Por exemplo, na escolha de modelos de parafusos e respectivos diâmetros e comprimentos, disponíveis em uma loja de ferragens. Opções disponíveis:

- modelo: cabeça sextavada (CS) e allen (A);
- diâmetros: cabeça sextavada (M6, M6,5 e M8) e allen (M8 e M9);
- comprimentos: cabeça sextavada e allen (8 e 10cm)

Nesse caso, o melhor a ser feito é dividir o problema em partes:

- **Parte 1**: escolha do parafuso CS: 3 diâmetros e 2 comprimentos, total de opções parte 1 = 3x2 = **6**;
- **Parte 2**: escolha do parafuso A: 2 diâmetros e 2 comprimentos, total de opções parte 2 = 2x2 = **4**;
- **Total de opções =** total de opções parte 1 + total de opções parte 2 = **6 + 4 = 10**.

3. Problemas Relacionados ao PFC

Para resolver problemas que usam o Princípio Multiplicativo é fundamental:

- Colocar-se no lugar da pessoa que deve executar a tarefa;
- Dividir a tarefa em etapas mais simples;
- Identificar as restrições em cada etapa.

4. Exemplos de Problemas Relacionados ao PFC

- Há 2 rodovias ligando as cidades A e B e 3 rodovias ligando as cidades B e C. Quantas opções de percurso tem uma pessoa que viajará de A até C, passando por B?
- Em uma sala há 313 homens e 424 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal homem-mulher, escolhido dentre as 737 pessoas da sala?
- Uma sala possui 4 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar e sair dessa sala?
- Quantas opções tem uma pessoa de montar um lanche composto por 1 salgado, 1 suco e 1 fruta, se há 5 opções de salgados, suco em 3 sabores e 2 opções de frutas?
- Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão?
- De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se, dispondo-se de 5 cadeiras colocadas em fila indiana?
- Quantos são os números naturais de 5 algarismos na base 10?
- Quantos são os números naturais de 5 algarismos na base 10, que não contém o 2?
- Quantos são os números naturais de 4 algarismos significativos (não contém o zero)?
- Quantos são os números naturais de 4 algarismos significativos distintos?
- Quantos são os números naturais de 4 algarismos que começam por 2?
- De uma turma de 30 alunos, determine quantas são as opções que se tem de escolher uma comissão formada por um presidente, um secretário e um tesoureiro, de modo que pessoa alguma ocupe mais de um cargo.
- Um professor tem 5 livros distintos para presentear os 3 melhores alunos da turma. Quantas são as opções que ele tem de dar um livro a cada um desses alunos?
- Ana vai ao seu guarda-roupa e lá encontra 3 calças e 6 blusas. Sabendo que ela tem apenas 2 pares de sapatos, de quantos modos ela pode montar o "look" do dia: calça-blusa-sapato?

- Uma pizzaria vende pizza em três sabores: Mussarela, Calabresa e Quatro Queijos, nos tamanhos: brotinho, grande ou família e nas modalidades: massa fina ou massa grossa. De quantas formas uma pessoa pode montar a sua pizza?
- Use o Princípio Multiplicativo para mostrar que todo conjunto A com n elementos, possui exatamente 2n subconjuntos.
- Os números de telefones, de um sistema de telefonia, são formados por 9 dígitos, escolhidos dentre 0, 1, 2, ..., 9. Sabendo que o primeiro dígito é sempre 9 e que 0 não pode ser usado nas 2a e 3a posições, quantos números de telefones podem ser formados nesse sistema?
- De quantas maneiras podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez (8×8) de modo que não haja duas torres na mesma linha e nem na mesma coluna?
- Quantos são os números naturais de 6 algarismos, que:
- (a) não contém o 9?
- (b) contém o 9?
- Quantos são os números naturais de 4 dígitos, que possuem pelo menos dois dígitos iguais.
- # Quantas ”palavras” de 4 letras distintas, terminadas em vogal, podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras, das quais 5 são vogais?
- # Quantos são os múltiplos de 5, menores que 6.000, formados de 4 algarismos distintos, nos quais não constam nenhum dos dígitos: 0, 1 e 9?
- # Ana dispõe de 10 cores, dentre elas as 5 básicas: branco, preto, vermelho, amarelo e azul. Quantas são as opções que Ana tem de pintar uma bandeira composta de 5 listras verticais, cada listra de uma só cor e todas com cores diferentes, sendo que as bordas direita e esquerda devem ser pintadas com as cores básicas e a listra central, com preto ou branco?
- # Quantos são os números naturais pares, existentes em base 10, formados de três algarismos distintos?
- # Deve-se escolher, dentre os 60 alunos das duas oitavas séries de uma escola, uma comissão composta de presidente, secretário e tesoureiro. O presidente deve ser um aluno da 8aA e o tesoureiro, uma mulher. Sabendo que dos 35 alunos da 8aA, 19 são homens e a

que 8aB tem apenas 10 mulheres, quantas são as opções que se tem de formar essa comissão?

- # De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?
- (01) Quantos números ímpares, de três algarismos distintos, podemos formar usando somente os dígitos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}?
- (02) De um alfabeto de 26 letras, 5 das quais são vogais, quantas são as ”palavras” de seis letras distintas, que começam e terminam por vogal?
- (03) Quantos são os números de quatro algarismos (não necessariamente distintos) formados com os dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 que são divisíveis por cinco e menores que 7.000?
- (04) Quantos números de sete algarismos distintos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que os dois primeiros sejam pares e os três últimos, ímpares?
- (05) Chama-se anagrama de uma palavra, qualquer ordenação que se possa formar com as letras dessa palavra. Assim, SETUDO e TESUDO são anagramas da palavra ESTUDO. Quantos são os anagramas da palavra ESTUDO que:
  - (a) podem ser formados, sem restrições?
  - (b) começam por vogal?
  - (c) começam e terminam por vogal?
- (06) As placas de automóveis são formadas por 3 letras (escolhidas de um alfabeto composto por 5 vogais e 21 consoantes) seguidas de 4 números. Quantas são as opções que se tem de construir uma placa de automóvel:
  - (a) sem restrições?
  - (b) com letras e números todos distintos?
  - (c) começando por vogal?
  - (d) começando por vogal e terminando por 0?
  - (e) formada só por vogal e número pares, sendo letras e números distintos?
  - (f) formadas só por vogal ou só por números pares, sendo letras e números distintos?

- (g) que tem pelo menos uma vogal?
- (h) que tem pelo menos um número par?

- (07) Um professor tem 8 livros distintos, sendo 4 de Geometria e 4 de Álgebra. Esses livros serão doados a 8 alunos, dos quais 3 disseram ter preferência pelos livros de Geometria, 2 pelos de Álgebra e os demais não tem preferência. De quantos modos o professor poderá fazer a distribuição dos livros, respeitando as preferências?
- (08) Quantos são os números naturais de 4 dígitos distintos, maiores que 5.500?
- (09) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é um rei e a segunda uma carta de paus?
- (10) Em uma eleição há 4 candidatos a presidente: 3 homens e 1 mulher; 3 candidatos a governador, todos do sexo masculino e 2 mulheres e 4 homens concorrendo ao senado. Determine o número de opções que tem um eleitor de montar o seu voto, escolhendo um presidente, um governador e um senador:
  - (a) sem restrições;
  - (b) de modo que todos os escolhidos sejam do sexo masculino;
  - (c) de modo que dois dos escolhidos sejam do sexo feminino;
  - (d) de modo que apenas um escolhido seja do sexo feminino.
- (11) Dispondo-se de sete cores, de quantos modos pode-se pintar os quadrantes do círculo abaixo, de modo que cada setor seja pintado de uma só cor e setores adjacentes (com uma linha fronteira comum) não tenham a mesma cor?
- (12) Dispondo-se de cinco cores distintas, de quantos modos podemos colorir uma bandeira de quatro listas, cada listra de uma só cor, de modo que a primeira e a quarta listras tenham cores distintas, o mesmo ocorrendo com as listras adjacentes?

Respostas da Lista de Exercícios 2

(01) 36

(02) 5.100.480

(03) 245

(04) 8.640

(05.a) 720

(05.b) 360

(05.c) 144

(06.a) 175.760.000

(06.b) 78.624.000

(06.c) 33.800.000

(06.d) 3.380.000

(06.e) 7.200

(06.f) 2.167.200

(06.g) 83.150.000

(06.h) 164.775.000

(07) 1.728

(08) 2.240

(09) 51

(10.a) 72

(10.b) 36

(10.c) 6

(10.d) 30

(11) 1.302

(12) 260

5. Princípio Aditivo da Contagem

O princípio aditivo da contagem é usado para determinar a quantidade total de possibilidades de executar apenas um processo, quando existem vários processos independentes disponíveis, com cada deles podendo ser executado de várias formas diferentes. Por exemplo, suponha que alguém queira assistir um programa de esportes ou um programa de música e que no pacote de TV a cabo dessa pessoa, existam 3 canais de espore e 2 de música. Qual é o total de possibilidades à disposição desse telespectador? Resposta: o total é 3 + 2 = 5 possibilidades.

6. Fatorial: Operações e Propriedades (existente + novo)

FATORIAL DE UM NÚMERO

Dado o número inteiro n, com $n \geq 0$, o **fatorial de n** é indicado pelo símbolo n! (que se lê: **n fatorial** ou **fatorial de n**) é definido por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad onde \qquad \begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$$

Exemplo 1. O fatorial de 4 é indicado por 4! que, por sua vez, é igual a $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

7. Permutações (existente + novo)

2.2 Permutações Simples

Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de quantos modos é possível ordená-los?

Por exemplo, para os objetos 1,2,3 há 6 ordenações: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto,

O número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Assim, $P_n = n!$ (Já que $0! = 1$, define-se $P_0 = 1$).

8. Permutações com Repetição (novo)

Generalizando, vamos procurar responder a seguinte questão:

- De quantos modos podemos ordenar os n objetos abaixo?

$$\underbrace{A_1A_1\ldots A_1}_{n_1\times}\underbrace{A_2A_2\ldots A_2}_{n_2\times}\underbrace{A_3A_3\ldots A_3}_{n_3\times}\ldots.\underbrace{A_kA_k\ldots A_k}_{n_k\times}$$

Ou seja, n_1 objetos A_1, n_2 objetos A_2, n_3 objetos A_3, ..., n_k objetos A_k, com $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Usaremos a notação $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ para representar o número de possibilidades de ordenar esses n objetos. Para determinar esse valor, usaremos o princípio multiplicativo, como fizemos nos exemplos acima.

Usaremos a notação $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ para representar o número de possibilidades de ordenar esses n objetos. Para determinar esse valor, usaremos o princípio multiplicativo, como fizemos nos exemplos acima.

Considere

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_}\ \ldots\ \underset{p_{n-1}}{\_\_\_\_}\ \underset{p_n}{\_\_}$$

os n espaços, nos quais serão colocados os n objetos.

	Etapas da tarefa	Possibilidades
1^a	Escolher n_1 posições, dentre n, para colocar A_1	$C_n^{n_1}$
2^a	Escolher n_2 posições, dentre $n - n_1$, para colocar A_2	$C_{n-n_1}^{n_2}$
3^a	Escolher n_3 posições, dentre $n - (n_1 + n_2)$, para colocar A_3	$C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$
...	...	..
n_k^a	Escolher n_k posições, dentre n_k restantes, para colocar A_k	$C_{n_k}^{n_k}$

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \times \ldots \times C_{n_k}^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_2!.(n-n_1-n_2-n3)!} \cdot \quad \ldots \quad \cdot \frac{n_k!}{n_k!(n_k-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Assim,

$$\boxed{P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_k!}.}$$

9. Permutações Circulares (novo)

2.4 Permutações Circulares

De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?

A resposta desse problema será representada por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. É fácil ver que $(PC)_n$ é em geral, diferente de P_n. Por exemplo, no caso $n = 3$ temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares.

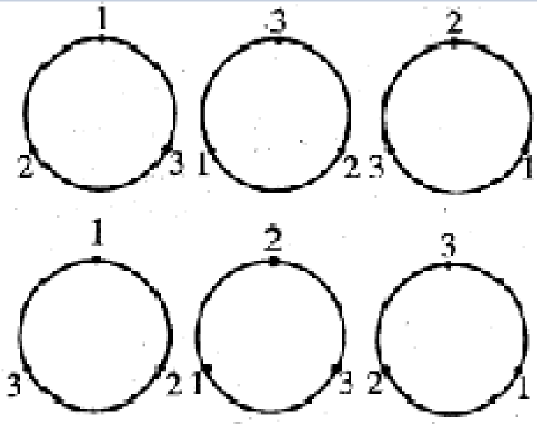


Fig. 2.6

No entanto as três primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

Repare que nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si. Nas três primeiras figuras, olhando os círculos em sentido anti-horário, 1 precede 2, que precede 3, que precede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma. Nas três últimas figuras, 1 precede 3, que precede 2, que precede 1; portanto, a posição relativa dos objetos é a mesma.

Podemos verificar que $(PC)_n = (n-1)!$ de dois modos:

a) Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

b) Como o que importa é a posição relativa dos objetos, há 1 modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há 1 modo de colocar o 2º objeto (ele será o objeto imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º); há 3 modos de colocar o 4º objeto (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º ou imediatamente após o 3º)...; há $n-1$ modos de colocar o n-ésimo e último objeto. Logo,

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$$

10. Arranjos (existente + novo)

Usaremos a notação $A_{n,k}$ para representar o número de arranjos (simples) de n elementos, tomados k a k. Nosso objetivo agora é determinar o valor de $A_{n,k}$ para inteiros arbitrários n e k, com $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$. Para isso, usaremos o Princípio Multiplicativo.

Considere $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um conjunto com n objetos e k um inteiro, com $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$. Nosso objetivo é contar quantas são as opções que temos de **escolher, de forma ordenada**, k elementos distintos de E.

Tarefa: Escolher k objetos distintos, dentre os n de E, e colocá-los na ordem abaixo:

$$\underset{p_1}{\_\_}\ \underset{p_2}{\_\_}\ \underset{p_3}{\_\_} \ldots \underset{p_{k-1}}{\_\_\_}\ \underset{p_k}{\_\_}$$

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher 1 elemento para p_1	-	n
2^a	Escolher 1 elemento para p_2	$\neq p_1$	$n-1$
3^a	Escolher 1 elemento para p_3	$\neq p_1, p_2$	$n-2$
..	...	..	...
k^a	Escolher 1 elemento para p_k	$\neq p_1, p_2, ...p_{k-1}$	$n-(k-1)$

Pelo P.M., o número de modos de executar a tarefa é dado por:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \tag{3.1}$$

Usando a definição de fatorial, podemos simplificar a expressão obtida para $A_{n,k}$. Multiplicando (3.1) por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, obtemos:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Assim, temos que:

$$\boxed{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

11. Combinações Simples (existente + novo)

Abordagem 1:

Dados um conjunto $E = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ com n elementos distintos, nosso objetivo agora é contar quantas são as combinações simples de classe k, dos elementos de E, ou, de modo equivalente, quantos são os subconjuntos de E com k elementos.

Vamos denotar por x esse total. Para determinar o valor de x, usaremos a técnica de *contagem dupla*, a qual consiste em efetuar determinada contagem de duas maneiras distintas. Considerando que não haverá erro em nenhum dos processos, necessariamente os resultados devem coincidir. Nesse caso, usaremos duas estratégias distintas para determinar o número de arranjo simples de n elementos, tomados k a k, conforme abaixo:

(i) Repetimos o mesmo processo feito no capítulo anterior, onde obtivemos:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(ii) Usaremos agora as seguintes etapas para escolher de forma ordenada k objetos de E:

$$\underset{p_1}{\text{—}}\ \underset{p_2}{\text{—}}\ \underset{p_3}{\text{—}} \cdots \underset{p_k}{\text{—}}.$$

	Etapas da tarefa	Restrições	N.P.
1^a	Escolher, de forma não ordenada, k elementos do conjunto E	-	x
2^a	Ordenar os k elementos escolhidos nas k posições acima	-	$k!$

Total: $x \times k!$

Como as duas estratégias executaram a mesma tarefa, então devemos ter:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = x \times k!$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Portanto,

O número de Combinações Simples de n objetos, tomados k a k, é dado por:

$$\mathbf{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}.$$

Como cada combinação de n elementos de classe k, nada mais é do que um subconjunto com k de um conjunto com cardinalidade n, podemos enunciar o seguinte resultado.

Abordagem 2:

2.3 Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 são

$$\begin{array}{ccccc} \{a_1, a_2, a_3\} & \{a_1, a_2, a_4\} & \{a_1, a_2, a_5\} & \{a_1, a_3, a_4\} & \{a_1, a_3, a_5\} \\ \{a_1, a_4, a_5\} & \{a_2, a_3, a_4\} & \{a_2, a_3, a_5\} & \{a_2, a_4, a_5\} & \{a_3, a_4, a_5\}. \end{array}$$

O número de combinações simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p. Assim, $C_5^3 = 10$.

Analisemos esta resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 5 modos; a do 2º, de 4 modos e a do 3º, de 3 modos. A resposta parece ser $5 \times 4 \times 3 = 60$. Entretanto, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$, etc... são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Com efeito, se dissemos que há 5 modos de escolher o 1º elemento da combinação é porque estamos considerando as escolhas a_1 e a_2 como diferentes e portanto estamos contando $\{a_1, a_2, a_3\}$ como diferente de $\{a_2, a_1, a_3\}$. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, a resposta é $60/6 = 10$.

No caso geral temos

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}, \quad 0 < p \leq n,$$

e $C_n^0 = 1$.

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$. Obtemos

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

12. Características de Problemas que Podem ser Resolvidos com Combinação Simples

Um problema de análise combinatória cuja solução é dada pela fórmula da combinação geralmente envolve a seleção de um grupo específico de elementos de um conjunto, onde a ordem dos elementos selecionados não importa. A fórmula da combinação é dada por:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Onde:

- $n!$ representa o fatorial de n, que é o produto de todos os inteiros positivos de 1 a n.
- $k!$ representa o fatorial de k, que é o produto de todos os inteiros positivos de 1 a k.
- $(n-k)!$ representa o fatorial de $n-k$.

As características de um problema de análise combinatória que pode ser resolvido usando a fórmula da combinação incluem:

1. **Seleção de Elementos:** O problema envolve escolher um grupo específico de elementos de um conjunto maior.
2. **Ordem Não Importa:** A ordem dos elementos selecionados não é relevante para a solução do problema. Em outras palavras, permutações não são consideradas no cálculo.
3. **Sem Repetição:** Cada elemento é escolhido no máximo uma vez. Não há repetição de elementos no grupo selecionado.
4. **Número Fixo de Elementos Selecionados:** O problema especifica um número fixo de elementos a serem escolhidos para formar o grupo.
5. **Contagem de Subconjuntos:** O resultado representa o número de subconjuntos de tamanho k que podem ser formados a partir de um conjunto de n elementos.

Exemplos comuns de problemas que se encaixam nessas características incluem:

- a formação de comitês,
- escolha de equipes esportivas,
- seleção de cartas em um baralho

Mas existem casos em que a resolução do problema não pode ser obtida de maneira simples, como colocar na fórmula os dados fornecidos, pura e simplesmente, e obter uma resposta. Na maioria dos casos, raciocínios um pouco mais complexos serão exigidos para se chegar ao resultado. E, então, será necessário lançar mão de um método específico, adequado ao problema, p. ex. dividir o problema em partes, onde a fórmula será usada mais de uma vez, junto com cálculos adicionais.

Exemplo de problema 1: Em um restaurante de massas são oferecidas 3 opções de macarrão e de 15 opções de acompanhamento (tipos de produtos: bacon, azeitona, molho branco, etc.). Para montar o prato, o cliente deve escolher o tipo de massa que ele deseja e até 4 acompanhamentos. Quantas opções diferentes de prato podem ser montadas?

- *macarrão = 3 opções;*
- *acompanhamento:*
  - *com um tipo de produto = 15 opções;*
  - *com dois tipos de produto = C15,2 = 15!/[(15 – 2)!2!] = 105*
  - *com três tipos de produto = C15,3 = 15!/[(15 – 3)!3!] = 455*
  - *com quatro tipos de produto = C15,4 = 15!/[(15 – 4)!4!] = 1365*
  - *total de opções de acompanhamento = 15 + 105 + 455 + 1365 = 1940*
- *total de opções com algum tipo de acompanhamento = 3x1940 = 5820*
- *total de opções sem nenhum acompanhamento = 3*
- *total de opções = 5820 + 3 = 5823*

Nesse restaurante podem ser montadas ***5823*** *opções diferentes de pratos.*

Exemplo de problema 2: Oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

Solução:

Parte 1: Inicialmente, vamos considerar o total de possibilidades, sem considerar a restrição relacionada aos canhotos.

Time 1	Time 2	Time 3	Time 4
Para formar este time, todos os 8 jogadores estão disponíveis. Então, existem C8,2 possibilidades de formação das duplas =	Aqui existem apenas 6 jogadores disponíveis porque 2 já estão no Time 1. Então, existem C6,2 possibilidades de formação das duplas =	Aqui existem apenas 4 jogadores disponíveis porque 4 já estão nos Times 1 e 2. Então, existem C6,2 possibilidades de formação das duplas =	Aqui existem apenas 2 jogadores disponíveis porque 6 já estão nos Times 1, 2 e 3. Então, existem C2,2 possibilidades de formação das duplas =

Então, nesta parte temos (C8,2)x(C6,2)x(C4,2)x(C2,2) possibilidades, para formar os times na ordem mostrada na tabela. Porém, essa ordenação de times (ou duplas) foi feita apenas para auxiliar a montagem do problema. Na prática, a ordem dos times não importa. Diante disso, é possível verificar que dentro das possibilidades calculadas acima, cada formação de times está sendo contada 4! Vezes (número de permutações dos times). Assim, o resultado, do total de possibilidades, desta parte 1, fica: (C8,2)x(C6,2)x(C4,2)x(C2,2)/4!

Parte 2: Agora, vamos considerar as possibilidades em que os canhotos ficam no mesmo time.
Com os 2 canhotos formando uma dupla, vão existir apenas 6 jogadores disponíveis para formar as outras 3 duplas.

Time 1	Time 2	Time 3	Time 4
2 canhotos	*Para formar este time, 6 jogadores estão disponíveis. Então, existem C6,2 possibilidades de formação das duplas =*	*Aqui existem apenas 4 jogadores disponíveis porque 2 já estão no Time 2. Então, existem C4,2 possibilidades de formação das duplas =*	*Aqui existem apenas 2 jogadores disponíveis porque 4 já estão nos Times 2 e 3. Então, existem C2,2 possibilidades de formação das duplas =*

Usando o mesmo raciocínio feito acima, nesta parte temos 1x(C6,2)x(C4,2)x(C2,2)/3!, porque a ordem dos times 2, 3 e 4, também, não importa.

Agora, para se chegar, ao que foi pedido no problema, basta subtrair o valor obtido na parte 2 do obtido na parte 1.

13. Combinações com Repetição (novo)

3 Combinações com Repetições

Definição 3. *Chama-se* ***Combinação Completa*** *ou* ***Combinação com Repetição****, de classe p de n objetos, a toda escolha não ordenado de p objetos, distintos ou não, dentre n objetos distintos dados.*

Exemplos:
(01) Para o conjunto $\{A, B, C, D\}$, temos que:

$$\{A, B, C\},\ \{A, A, B\},\ \{A, A, A\} \text{ e } \{B, C, C\}$$

são algumas combinações completas, de classe 3 das 4 letras dadas;

(02) Dado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

$$\{1, 2, 3, 8\},\ \{1, 1, 5, 6\},\ \{1, 1, 1, 7\} \text{ e } \{1, 1, 1, 1\}$$

são algumas escolhas não ordenadas de 4 objetos, distintos ou não, dos 8 números dados, logo uma combinação completa de classe 4, dos 8 objetos.

A próxima proposição diz quantas são as combinações completas de classe p, de n objetos distintos.

Proposição 7. *O número de combinação completas de classe p de n objetos distintos, denotado por CR_n^p, é dado por:*

$$CR_n^p = P_{p+n-1}^{p,(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Demonstração:
Sejam

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

n objetos distintos, dos quais queremos escolher p, com possíveis repetições. Considere:
x_1 - a quantidade de objetos do tipo A_1 que serão escolhidas;
x_2 - a quantidade de objetos do tipo A_2 que serão escolhidas;
$\vdots$
x_p - a quantidade de objetos do tipo A_p que serão escolhidas.

Como serão escolhidos p objetos, então

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = p. \tag{7.7}$$

E como podemos ou não escolher quaisquer um desses objetos, segue que

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \quad ..., \quad x_n \geq 0.$$

Assim, o problema recai em determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação (7.7), cujo total é dado por:

$$P_{p+n-1}^{p,(n-1)} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

14. Comissões e Anagramas (existente - avaliar)

Na análise combinatória, anagramas e comissões são tópicos clássicos que envolvem o cálculo do número de maneiras distintas de organizar ou selecionar elementos de um conjunto. Vamos explorar cada um deles em detalhes.

Anagramas

Definição: Um anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra para formar outra palavra ou uma sequência, que nem sempre precisa ter sentido. O problema de calcular o número de anagramas possíveis envolve determinar todas as possíveis permutações das letras da palavra dada.

Cálculo:

- **Caso Geral:** Se uma palavra tem n letras distintas, o número de anagramas possíveis é dado por $n!$ (fatorial de n). Por exemplo, para a palavra "AMOR", que tem 4 letras distintas, o número de anagramas possíveis é $4! = 24$.
- **Letras Repetidas:** Quando a palavra tem letras repetidas, o número de anagramas possíveis é reduzido. A fórmula usada nesse caso é:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

Onde:

- n é o número total de letras.
- $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são os fatoriais dos números de repetições das letras.

Exemplo: Para a palavra "BALA", que tem 4 letras onde a letra "A" se repete 2 vezes, o número de anagramas possíveis é:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Isso significa que existem 12 anagramas distintos que podem ser formados com as letras da palavra "BALA".

Comissões

Definição: A formação de comissões envolve selecionar um subconjunto de elementos de um conjunto maior, sem considerar a ordem dos elementos dentro desse subconjunto.

Cálculo:

- **Comissões Simples:** Se temos um conjunto de n elementos e queremos formar uma comissão de k membros, o número de comissões possíveis é dado por uma **combinação.** A fórmula da combinação é:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo: Se você tem 10 pessoas e quer formar uma comissão de 3 membros, o número de comissões possíveis é:

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

Isso significa que há 120 maneiras distintas de escolher 3 pessoas para formar a comissão.

- **Comissões com Restrições:** Se houver restrições, como a inclusão de pelo menos uma pessoa de um determinado grupo ou exclusão de outra, a fórmula pode se complicar e exigir uma análise caso a caso. Por exemplo, se é necessário que a comissão tenha pelo menos uma mulher, o número total de comissões válidas será o total sem restrição menos as comissões que não têm nenhuma mulher.

Aplicações Práticas:

- **Anagramas:** São utilizados em quebra-cabeças, criptografia, e análise linguística.
- **Comissões:** São aplicadas em problemas de seleção de grupos, distribuição de tarefas, e alocação de recursos.

Exercícios:

1. **Anagramas:** Quantos anagramas podem ser formados com a palavra "MATEMÁTICA"?
2. **Comissões:** De um grupo de 15 pessoas, quantas comissões de 5 membros podem ser formadas se ao menos 2 delas devem ser mulheres, considerando que há 8 mulheres e 7 homens no grupo?

Esses exemplos e conceitos são fundamentais na análise combinatória, fornecendo ferramentas para resolver problemas práticos de organização e seleção de elementos.

15. Binômio de Newton (novo)

Expansão de expressões do tipo **(a + b)^n**.

1 Número Binomial

Definição 1. *Dados inteiros n e k, com $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, chamamos de* ***Número Binomial de numerador*** n ***e classe*** k, *ao inteiro indicado por* C_n^k, *dado por:*

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

O número binomial C_n^k, pode também ser representado por $C_{n,k}$ ou $\binom{n}{k}$.

Exemplos:

(01) $C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!} = 10.$

(02) $C_7^1 = \frac{7!}{1!.6!} = 7.$

(03) $C_n^0 = \frac{n!}{0!.n!} = 1$, para todo inteiro $n \geq 0$.

(04) $C_n^n = \frac{n!}{n!.0!} = 1$, para todo inteiro $n \geq 0$.

(05) $C_{10}^8 = \frac{10!}{8!.2!} = C_{10}^2$. Mais geralmente, temos que:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^{n-k}.$$

Os números binomiais satisfazem uma importante relação, dada na proposição abaixo, conhecida como Relação de Stifel.

C_n^k e C_n^{n-k} são ditos Números Binomiais Complementares.

Proposição 3. *(**Relação de Stifel**) Para quaisquer inteiros n e k, com $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n-1$, temos a identidade:*

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right] \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}\right] \\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

C_n^k e C_n^{k+1} são ditos Números Binomiais Consecutivos.

16. Teorema do Binômio (novo)

O teorema do binômio de Newton se escreve como segue:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Expandido a formula acima para alguns valores pequenos de n, temos:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= 1x + 1y \\
(x+y)^2 &= 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
(x+y)^3 &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1x^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que os termos da linha n do triângulo de Pascal representam os coeficientes da expansão binomial de $(x+y)^n$.

17. Binômios e suas Propriedades (existente)

Os binômios são expressões algébricas que contêm dois termos, usualmente representados na forma (a+b). A análise dos binômios é fundamental na álgebra e possui diversas propriedades importantes, especialmente quando consideramos a expansão de potências de binômios. Vamos explorar os conceitos e propriedades principais.

1. Binômio de Newton

O teorema binomial, ou Binômio de Newton, permite expandir potências de binômios na forma $(a+b)^n$, onde n é um número inteiro não negativo. A fórmula geral para a expansão é:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Onde:

- $\binom{n}{k}$ é o **coeficiente binomial**, dado por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- a^{n-k} e b^k são as potências dos termos a e b.
- A soma vai de $k = 0$ até $k = n$.

Exemplo: Expandindo $(x+y)^3$ usando o Binômio de Newton:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3$$

Substituindo os coeficientes binomiais:

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot x y^2 + 1 \cdot y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

2. Coeficientes Binomiais

Os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ possuem várias propriedades importantes:

- **Simetria:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Isso significa que o coeficiente do k-ésimo termo é igual ao coeficiente do $(n-k)$-ésimo termo.

- **Somatório de Coeficientes:**

A soma de todos os coeficientes binomiais para uma dada potência n é igual a 2^n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Isso reflete a soma de todos os termos na expansão de $(1+1)^n$.

- **Propriedade de Recorrência:**

Os coeficientes binomiais seguem a relação de recorrência de Pascal:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Essa propriedade é a base para o **Triângulo de Pascal**.

3. Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é uma forma visual de organizar os coeficientes binomiais. Cada linha n do triângulo contém os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ para k variando de 0 a n.

Exemplo: As primeiras linhas do Triângulo de Pascal são:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Cada elemento do triângulo é a soma dos dois elementos diretamente acima dele, ilustrando a propriedade de recorrência dos coeficientes binomiais.

4. Aplicações do Binômio de Newton

As expansões binomiais têm várias aplicações práticas, incluindo:

- **Fórmulas Algébricas:** Expansões de binômios são usadas para simplificar expressões algébricas e resolver equações.
- **Teoria das Probabilidades:** Na distribuição binomial, que descreve a probabilidade de um número específico de sucessos em uma série de ensaios independentes, os coeficientes binomiais aparecem naturalmente.
- **Análise Combinatória:** Os coeficientes binomiais são fundamentais no cálculo de combinações, que são usadas para contar o número de maneiras de selecionar subconjuntos de um conjunto maior.

5. Generalização do Teorema Binomial

O Teorema Binomial pode ser generalizado para casos onde n é qualquer número real ou complexo. A fórmula se torna uma série infinita conhecida como **Série Binomial:**

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

Essa expansão é válida para $|x| < 1$ quando n não é um número inteiro positivo.

Exercícios:

1. **Expansão:** Expanda $(2x - 3y)^4$ usando o Binômio de Newton.
2. **Aplicação:** Quantos subconjuntos de 4 elementos podem ser formados a partir de um conjunto de 10 elementos?
3. **Soma dos Coeficientes:** Calcule a soma dos coeficientes na expansão de $(3x + 2y)^5$.

Conclusão:

O estudo de binômios e suas propriedades é essencial na matemática, fornecendo ferramentas poderosas para manipular e entender expressões algébricas complexas. As aplicações práticas do teorema binomial abrangem diversas áreas, desde a resolução de problemas algébricos até a análise de probabilidades e combinatória.

18. Teorema do Multinômio (novo - postergar)

Extensão do teorema do binômio para polinômios com mais de dois termos.

O Teorema do Multinômio é uma generalização do binômio de Newton para potências de expressões algébricas que envolvem mais de dois termos. Enquanto o Teorema do Binômio lida com a expansão de $(x_1 + x_2)^n$, o Teorema do Multinômio se aplica à expansão de uma soma de múltiplos termos elevados a uma potência, ou seja, $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$.

Formulação do Teorema do Multinômio

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_m$ termos de uma soma e n um número inteiro positivo. O teorema do multinômio afirma que:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n} \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, \ldots\, k_m!} \cdot x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \ldots\, x_m^{k_m}$$

onde a soma é tomada sobre todos os conjuntos de inteiros não-negativos $k_1, k_2, \ldots, k_m$ tais que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Explicação dos Termos

- $n!$ é o fatorial de n, que representa o produto de todos os inteiros positivos até n.
- $k_1!, k_2!, \ldots, k_m!$ são os fatoriais dos k_i, que representam a contagem das permutações possíveis dentro de cada termo.
- $x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \ldots\, x_m^{k_m}$ representa o produto das variáveis elevadas a seus respectivos expoentes.

Exemplo de Aplicação

Considere a expansão de $(x + y + z)^3$:

$$(x + y + z)^3 = \sum_{k_1+k_2+k_3=3} \frac{3!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \cdot x^{k_1}\, y^{k_2}\, z^{k_3}$$

As combinações possíveis de k_1, k_2, k_3 que somam 3 são:

- $(k_1, k_2, k_3) = (3,0,0), (0,3,0), (0,0,3)$
- $(k_1, k_2, k_3) = (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,0,2), (0,2,1), (0,1,2)$
- $(k_1, k_2, k_3) = (1,1,1)$

Substituindo e expandindo:

$$(x + y + z)^3 = \frac{3!}{3!0!0!}x^3 + \frac{3!}{0!3!0!}y^3 + \frac{3!}{0!0!3!}z^3 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y + \frac{3!}{2!0!1!}x^2z$$

Simplificando:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3xz^2 + 3y^2z + 3y.$$

Aplicações do Teorema do Multinômio

O Teorema do Multinômio é útil em várias áreas da matemática, incluindo combinatória, probabilidade e álgebra. Ele é aplicado em problemas onde é necessário expandir somas de múltiplos termos elevados a uma potência, como no cálculo de probabilidades envolvendo eventos independentes e na análise de algoritmos combinatórios.

Conclusão:
O Teorema do Multinômio generaliza o teorema do binômio para somas de mais de dois termos, fornecendo uma ferramenta poderosa para a expansão de expressões algébricas complexas. Ele tem ampla aplicação em várias áreas da matemática, tornando-se essencial para resolver problemas que envolvem a combinação de múltiplos termos.

19. Princípio da Inclusão e Exclusão (novo - postergar)

Utilizado para contar elementos de conjuntos interseccionados.

x

O Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE) é uma técnica fundamental na combinatória, utilizada para calcular o número de elementos em uma união de conjuntos quando esses conjuntos podem ter interseções. A ideia central do PIE é corrigir a contagem dos elementos que podem ser contados mais de uma vez devido às interseções entre os conjuntos.

Formulação do Princípio da Inclusão e Exclusão

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma coleção de n conjuntos finitos. O número de elementos na união desses conjuntos, $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$, é dado por:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j$$

OBS: Exitem mais termos na fórmula acima!!!

Explicação dos Termos

- $|A_i|$: É o número de elementos no conjunto A_i.
- $|A_i \cap A_j|$: É o número de elementos na interseção dos conjuntos A_i e A_j, ou seja, os elementos que pertencem a ambos os conjuntos.
- $|A_i \cap A_j \cap A_k|$: É o número de elementos na interseção de três conjuntos A_i, A_j, e A_k.

O princípio começa somando os elementos de todos os conjuntos individuais, depois subtrai as interseções de pares de conjuntos (para corrigir a dupla contagem desses elementos), adiciona novamente as interseções de trios (pois foram subtraídas mais de uma vez), e assim por diante.

Exemplo de Aplicação com Dois Conjuntos

Considere dois conjuntos A e B. O número de elementos na união $A \cup B$ pode ser calculado como:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Se A e B forem disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, então $|A \cup B| = |A| + |B|$, que é a soma simples dos elementos dos dois conjuntos.

Exemplo de Aplicação com Três Conjuntos

Agora, considere três conjuntos A, B, e C. O número de elementos na união $A \cup B \cup C$ é dado por:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Exemplo Prático

Suponha que em uma pesquisa, foram registrados os seguintes dados:

- 100 pessoas gostam de pizza ($|P| = 100$)
- 80 pessoas gostam de sorvete ($|S| = 80$)
- 50 pessoas gostam de chocolate ($|C| = 50$)
- 30 pessoas gostam de pizza e sorvete ($|P \cap S| = 30$)
- 20 pessoas gostam de sorvete e chocolate ($|S \cap C| = 20$)
- 10 pessoas gostam de pizza e chocolate ($|P \cap C| = 10$)
- 5 pessoas gostam de todos os três ($|P \cap S \cap C| = 5$)

Para calcular o número de pessoas que gostam de pelo menos uma dessas três coisas, usamos o Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$|P \cup S \cup C| = |P| + |S| + |C| - |P \cap S| - |S \cap C| - |P \cap C| + |P \cap S \cap C|$$

Substituindo os valores:

$$|P \cup S \cup C| = 100 + 80 + 50 - 30 - 20 - 10 + 5 = 175$$

Portanto, 175 pessoas gostam de pelo menos uma das três opções: pizza, sorvete ou chocolate.

Conclusão:

O Princípio da Inclusão e Exclusão é uma ferramenta poderosa e versátil na combinatória, permitindo a contagem precisa de elementos em uniões de conjuntos que possuem interseções. Ele é amplamente utilizado em problemas de contagem em probabilidade, teoria dos números, análise combinatória e diversas outras áreas da matemática.

Aplicações em probabilidade (novo)
Utilização da análise combinatória em cálculos de probabilidade.

O Princípio da Inclusão e Exclusão (PIE) também é amplamente utilizado em probabilidade para calcular a probabilidade de uma união de eventos, especialmente quando esses eventos podem ter interseções. Vamos ver alguns exemplos práticos de aplicação do PIE em probabilidade.

Exemplo 1: Três Eventos

Considere três eventos A, B, e C em um espaço amostral S. Queremos calcular a probabilidade de que pelo menos um desses eventos ocorra, ou seja, a probabilidade de $A \cup B \cup C$.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, a probabilidade de $A \cup B \cup C$ é dada por:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C$$

OBS 2: A fórmula acima possui mais termos!!!

Exemplo Prático

Suponha que em um dado jogo de tabuleiro, as probabilidades de cair em determinadas casas A, B, e C sejam as seguintes:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(C) = 0{,}2$
- $P(A \cap B) = 0{,}1$
- $P(B \cap C) = 0{,}05$
- $P(A \cap C) = 0{,}02$
- $P(A \cap B \cap C) = 0{,}01$

Queremos encontrar a probabilidade de cair em pelo menos uma dessas casas. Aplicando o PIE:

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}05 - 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}74$$

Portanto, a probabilidade de cair em pelo menos uma dessas casas é 0,74.

Exemplo 2: Dois Eventos Dependentes

Agora considere dois eventos A e B que representam o sucesso de duas diferentes estratégias em um jogo, onde as probabilidades são:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B) = 0{,}5$
- $P(A \cap B) = 0{,}3$

Para calcular a probabilidade de sucesso em pelo menos uma das estratégias, aplicamos o PIE:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$$

Portanto, a probabilidade de sucesso em pelo menos uma das estratégias é 0,8.

Exemplo 3: N Eventos Independentes

Considere n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que representam a ocorrência de n diferentes falhas em um sistema, e cada falha tem a probabilidade p de ocorrer. Suponha que todos os eventos são independentes.

O Princípio da Inclusão e Exclusão pode ser utilizado para calcular a probabilidade de que pelo menos uma dessas falhas ocorra:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdot$$

Se $P(A_i) = p$ para todos i e os eventos são independentes, então:

$$P(A_i \cap A_j) = p^2, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = p^3, \text{ etc.}$$

Este cálculo pode se tornar complexo para grandes n, mas a fórmula oferece um método para encontrar a probabilidade de ocorrência de pelo menos uma falha no sistema.

Exemplo Prático

Se $n = 3$ e $p = 0{,}2$, temos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3(0{,}2) - 3(0{,}2^2) + 0{,}2^3 = 0{,}6 - 0{,}12 + 0{,}008 = 0{,}488$$

Portanto, a probabilidade de pelo menos uma falha ocorrer é 0,488.

Conclusão:

O Princípio da Inclusão e Exclusão é uma técnica poderosa em probabilidade, permitindo o cálculo preciso da probabilidade de união de eventos, especialmente quando esses eventos podem ter interseções. Ele é aplicado em uma variedade de problemas, desde a análise de estratégias em jogos até a modelagem de falhas em sistemas complexos.

20. Teoria dos Grafos (novo)

Representação de problemas combinatórios através de grafos.

A teoria dos grafos é uma área da matemática e ciência da computação que estuda as propriedades dos grafos, que são estruturas usadas para modelar relações entre objetos. Um grafo consiste em um conjunto de **vértices** (ou nós) e um conjunto de **arestas** que conectam pares de vértices. Grafos são ferramentas poderosas para representar e resolver problemas combinatórios em diversas áreas, como redes de computadores, logística, redes sociais, biologia computacional, entre outras.

Estrutura Básica de um Grafo

Um **grafo** G é definido como um par $G = (V, E)$, onde:

- V é um conjunto de vértices (ou nós).
- E é um conjunto de arestas (ou arcos), que são pares de vértices que indicam conexões entre esses vértices.

Tipos de Grafos

- **Grafo Simples**: Um grafo sem laços (arestas que ligam um vértice a ele mesmo) e sem múltiplas arestas entre dois vértices.
- **Grafo Direcionado (Digrafo)**: Um grafo onde as arestas têm uma direção, ou seja, cada aresta vai de um vértice a outro em uma direção específica.
- **Grafo Ponderado**: Um grafo em que cada aresta tem um peso ou custo associado.
- **Grafo Conexo**: Um grafo onde existe um caminho entre qualquer par de vértices.
- **Grafo Completo**: Um grafo onde cada par de vértices está conectado por uma aresta.

Problemas Combinatórios Representados por Grafos

Grafos são extremamente úteis para representar problemas combinatórios de forma visual e matemática. Abaixo estão alguns exemplos de como grafos podem ser usados para modelar e resolver problemas combinatórios.

1. **Problema do Caminho Mínimo**

Este problema envolve encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices em um grafo ponderado.

- **Exemplo:** Em um mapa de estradas, os vértices podem representar cidades, e as arestas podem representar estradas com pesos correspondentes às distâncias ou tempos de viagem. O problema do caminho mínimo busca a rota mais curta entre duas cidades.
- **Algoritmo Comum:** O algoritmo de Dijkstra é uma solução clássica para encontrar o caminho mais curto em grafos com arestas não negativas.

2. **Problema do Caixeiro Viajante (TSP)**

O problema do Caixeiro Viajante é um problema clássico de otimização combinatória, onde o objetivo é encontrar o caminho mais curto que passa por todos os vértices (cidades) exatamente uma vez e retorna ao ponto de partida.

- **Exemplo**: Um vendedor deseja visitar várias cidades e retornar à cidade de origem, minimizando a distância total percorrida.
- **Representação por Grafo**: Cada cidade é um vértice, e cada caminho entre duas cidades é uma aresta com um peso correspondente à distância entre as cidades.
- **Algoritmos**: O problema é NP-difícil, mas pode ser abordado com algoritmos como busca exaustiva, aproximação, ou métodos heurísticos como o algoritmo genético ou o simulated annealing.

3. **Problema da Coloração de Grafos**

Este problema consiste em atribuir cores a cada vértice de um grafo de tal maneira que dois vértices adjacentes (conectados por uma aresta) não compartilhem a mesma cor. O objetivo é minimizar o número de cores usadas.

- **Exemplo**: O problema pode ser aplicado ao agendamento de tarefas, onde cada tarefa é um vértice e uma aresta indica que duas tarefas não podem ser realizadas simultaneamente.
- **Aplicação**: A coloração de grafos é usada em problemas como agendamento de exames em universidades, onde exames que compartilham alunos não podem ser realizados ao mesmo tempo.

4. **Problema da Árvore Geradora Mínima**

Este problema envolve encontrar uma árvore geradora (um subgrafo que conecta todos os vértices sem formar ciclos) de custo mínimo em um grafo ponderado.

- **Exemplo**: Suponha que você precise conectar várias cidades com a menor quantidade de estrada possível.
- **Algoritmos Comuns**: O algoritmo de Kruskal e o algoritmo de Prim são soluções clássicas para encontrar a árvore geradora mínima.

5. **Problema do Emparelhamento**

No problema do emparelhamento, o objetivo é encontrar um conjunto de arestas em um grafo, onde nenhum vértice é compartilhado por mais de uma aresta. O problema pode ser maximizar o número de arestas ou encontrar um emparelhamento perfeito.

- **Exemplo**: Um exemplo clássico é o problema de emparelhamento estável em mercados de trabalho ou casamentos.
- **Algoritmos**: O algoritmo de Gale-Shapley é usado para resolver o problema do emparelhamento estável, enquanto o algoritmo de Edmonds resolve o problema do emparelhamento máximo.

Aplicações Práticas dos Grafos

1. **Redes de Transporte**: Grafos modelam sistemas de transporte, como redes de estradas, rotas aéreas e sistemas ferroviários, permitindo a otimização de rotas e minimização de custos.
2. **Redes de Computadores**: Grafos representam topologias de redes de computadores, onde vértices são computadores ou roteadores, e as arestas representam conexões.
3. **Redes Sociais**: Grafos modelam relações em redes sociais, com vértices representando indivíduos e arestas representando interações ou amizades.
4. **Biologia Computacional**: Grafos representam redes de interação entre proteínas, genes ou metabolitos em sistemas biológicos.

Conclusão:
A teoria dos grafos oferece uma linguagem poderosa para representar e resolver uma ampla variedade de problemas combinatórios. Ao modelar problemas como caminhos mínimos, coloração de grafos, emparelhamento, entre outros, em termos de vértices e arestas, podemos aplicar algoritmos eficientes para encontrar soluções ótimas ou aproximadas. Esta abordagem é amplamente utilizada em ciência da computação, engenharia, biologia, logística, e muitas outras áreas.

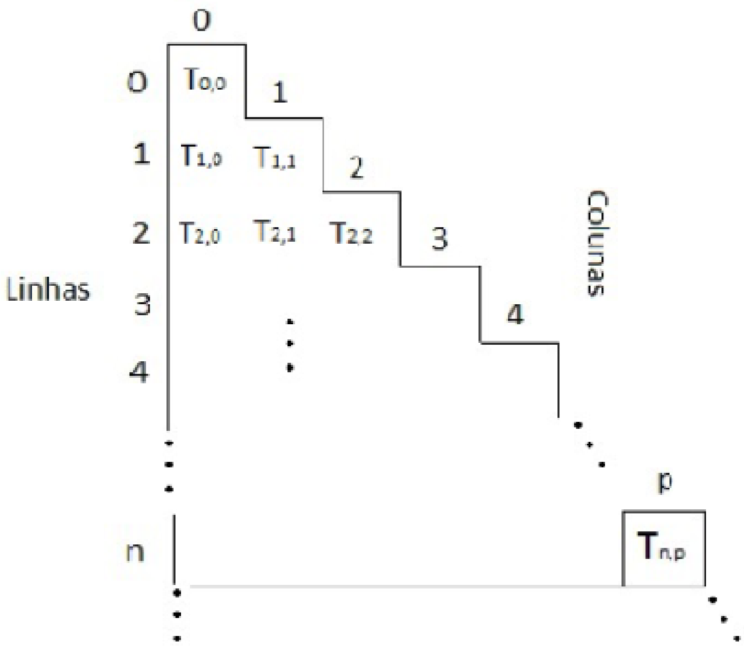
21. Triângulo de Pascal (existente + novo)

Uma forma organizada de mostrar os coeficientes binomiais.

O Triângulo Aritmético é também chamado de Triângulo de Pascal pelos franceses, Triângulo de Tartaglia pelos italianos, Tartaglia-Pascal em outras localidades ou simplesmente Triângulo Combinatório. Não podemos falar em descoberta, mas sim em redescobertas e inserção, imensuráveis vezes, em todas as localidades onde se estuda matemática.

O Triângulo Aritmético, de Tartaglia-Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal, é uma composição geométrica triangular formada por números que observam as seguintes regras:

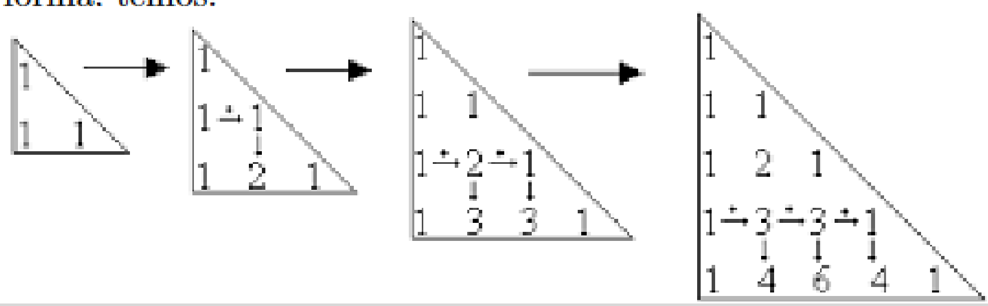
- o triângulo é formado por linhas e colunas: numerando as linhas e as colunas a partir do zero, o elemento que se encontra na linha n $(n = 0, 1, 2, ...)$ e na coluna p $(p = 0, 1, ..., n)$ denotaremos por $T_{n,p}$.



- o primeiro e o último elementos de cada linha são iguais a 1;
- a linha 0 tem um elemento, a linha 1 tem dois elementos, a linha 2 tem três elementos, e assim por diante. Isto é, cada linha n tem n+1 elementos;
- a partir da linha 2, cada elemento é a soma de dois elementos da linha anterior: o imediatamente acima e o seu anterior. Ou seja, sendo $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ e $0 \leq p \leq n-1$,

$$T_{n+1,p+1} = T_{n,p} + T_{n,p+1}.$$

Desta forma, temos:



22. Relação entre Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton

Utilizando os produtos notáveis estudados no ensino fundamental, temos:

$(x+a)^0 = 1$

$(x+a)^1 = 1x + 1a$

$(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = 1x^2 + 2xa + 1a^2$

$(x+a)^3 = (x+a).(x+a)^2 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$

Observando os coeficientes dos desenvolvimentos, percebemos que eles formam as primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

$(x+a)^0 = 1$		$B_{0,0} = 1$			
$(x+a)^1 = 1x + 1a$		$B_{1,0} = 1$	$B_{1,1} = 1$		
$(x+a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$		$B_{2,0} = 1$	$B_{2,1} = 2$	$B_{2,2} = 1$	
$(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$		$B_{3,0} = 1$	$B_{3,1} = 3$	$B_{3,2} = 3$	$B_{3,3} = 1$

Vamos mostrar que é possível escrever qualquer desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ observando seus coeficientes nas linhas do Triângulo Aritmético.

23. Relação entre a Análise Combinatória e o Binômio de Newton

A relação entre a Análise Combinatória e o Binômio de Newton se dá através dos coeficientes do desenvolvimento do binômio, denotados por $B_{n,p}$.

O termo genérico $B_{n,p}x^p a^{n-p}$ do Binômio de Newton $(x+a)^n$, é obtido tomando em p dos fatores $(p = 0, 1, ..., n)$ a primeira parcela e tomando nos restantes $n - p$ fatores a segunda parcela. Como isso pode ser feito de $\binom{n}{p} = C_n^p$ maneiras, logo podemos concluir que

$$B_{n,p} = C_n^p.$$

Assim podemos reescrever o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ utilizando os números binomiais:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^0 a^n + C_n^1 x^1 a^{n-1} + C_n^2 x^2 a^{n-2} + ... + C_n^p x^p a^{n-p} + ... + C_n^n x^n a^0.$$

24. Relação entre o Triângulo de Pascal e a Análise Combinatória

Agora que identificamos os coeficientes do Binômio de Newton, $B_{n,p}$, como a combinação de n elementos tomados p a p ($B_{n,p} = C_n^p$), podemos ver o Triângulo de Pascal como um arranjo geométrico triangular formado pelos números C_n^p, já que

$$T_{n,p} = B_{n,p} = C_n^p.$$

Na linha n e na coluna p ($0 \leq p \leq n$) é colocado o coeficiente binomial $\binom{n}{p} = C_n^p$.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 & & \vdots & & &
\end{array}$$

ou

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & \vdots & & &
\end{array}$$